ÜBER EINE

EIN-ZWEIDEUTIGE VERWANDTSCHAFT.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

VORGELEGT

VON

REINHOLD MÜLLER,

OBERLEHRER AM KÖNIGL. GYMNASIUM ZU DRESDEN-NEUSTADT.

MIT EINER LITHOGRAPHIERTEN TAFEL.

DRESDEN,

DRUCK VON B. G. TEUBNER.

1883.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545804_0018

Die vorliegende Arbeit, zu der ich durch Herrn Burmester angeregt worden bin, steht in unmittelbarem Zusammenhange mit einem Abschnitte aus der Kinematik, nämlich mit der Untersuchung derjenigen Beziehungen, die bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in irgend einer Phase zwischen den Systempunkten und den Krümmungsmittelpunkten ihrer Bahnkurven auftreten. Sind $S_1 S_2 S_3$ drei unendlich benachbarte Phasen eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems S und $A_1 A_2 A_3$ die zugehörigen Lagen eines Systempunktes A, so wird der Krümmungsmittelpunkt A der Bahnkurve von A in der Phase S_1 als Centrum des durch $A_1 A_2 A_3$ gehenden Kreises erhalten. Konstruiert man so für alle Punkte von S_1 die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte, so bilden dieselben ein System Σ, und dann ergiebt sich die Aufgabe, die geometrische Verwandtschaft zu untersuchen, welche zwischen den Systemen S_1 und Σ besteht.

Ich habe die soeben ausgesprochene Fragestellung in der vorliegenden Arbeit in unwesentlicher Weise abgeändert; ich betrachte nämlich im folgenden nicht drei unendlich benachbarte, sondern überhaupt irgend drei ähnliche und in derselben Ebene gelegene Systeme $S_1 S_2 S_3$, konstruiere für dieselben wie vorhin das System Σ und behandle dann die Verwandtschaft zwischen den so definierten Systemen S_1 und Σ. Es wird sich zeigen, dass dieselbe zu den bisher nur wenig erforschten ein-zweideutigen Verwandtschaften gehört.

Bei den folgenden Untersuchungen wird zumeist das synthetische Verfahren angewendet. Ich bestimme zunächst einige ausgezeichnete Punkte und Kurven, die bei der Abbildung des einen Systems auf das andere eine hervorragende Rolle spielen, und beschäftige mich dann mit der Aufgabe, zu einer Geraden des einen Systems die konjugierte Kurve im andern System zu ermitteln. Hieran schliessen sich Sätze über die Abbildung

einer Kurve von beliebiger Ordnung und beliebigen Singularitäten und einige Anwendungen dieser Sätze auf spezielle Fälle.

Die ein-zweideutige Verwandtschaft, zu der man von den drei ähnlichen Systemen $S_1 S_2 S_3$ ausgehend gelangt, kann auch von einem wesentlich anderen Gesichtspunkte aus definiert werden. Ich verdanke Herrn Klein die Bemerkung, dass dieselbe ein spezieller Fall derjenigen Verwandtschaft ist, welche Clebsch in Band III der mathematischen Annalen behandelt hat und die man geometrisch am einfachsten erhält, wenn man eine Fläche dritter Ordnung einerseits in bekannter Weise auf eine Ebene S_1 eindeutig abbildet, andererseits durch stereographische Projektion auf eine Ebene Σ überträgt. Indem ich im weitern Verlaufe der Arbeit von dieser neuen Betrachtungsweise Gebrauch mache, werden die wichtigsten bisher erhaltenen Resultate auf eine einfache Art bestätigt und manche derselben übersichtlicher als zuvor gruppiert.

Zum Schlusse kehre ich wieder zu den ursprünglich betrachteten Systemen $S_1 S_2 S_3$ zurück, die ich nunmehr gewissen besonderen Voraussetzungen unterwerfe. Dadurch ergeben sich noch einige spezielle Fälle der vorher behandelten Verwandtschaft.

---

1. Fundamentalbeziehungen zwischen drei ähnlichen Systemen, die derselben Ebene angehören. — Es seien $S_1 S_2 S_3$ drei in derselben Ebene liegende ähnliche Systeme. Bezeichnet man allgemein mit P^{hi} den reellen Punkt, welchen S_h und S_i selbstentsprechend gemein haben und mit P_k^{hi} den Punkt, welcher P^{hi} in S_k entspricht, so sind durch Angabe von $P^{12} P^{23} P^{31} P_1^{23}$ die drei Systeme eindeutig definiert, und es ist

$$\measuredangle P^{12} P_1^{23} P^{31} \sim \measuredangle P^{12} P^{23} P_2^{31} \sim \measuredangle P_3^{12} P^{23} P^{31},$$

ferner

$$P_1^{23} \widehat{P^{12}} P^{23} = P^{31} \widehat{P^{12}} P_2^{31}$$

u. s. w. (Fig. 1). Konstruiert man für jedes der genannten Dreiecke den umgeschriebenen Kreis und bezeichnet denselben resp. mit $k_1 k_2 k_3$, so sind $k_1 k_2 k_3$ entsprechende Kreise der betrachteten Systeme. Die drei Kreise $k_1 k_2 k_3$ schneiden sich in einem Punkte T^{123}. In der That, sind $\alpha^{12} \alpha^{23} \alpha^{31}$

die Winkel des Bogendreiecks $P^{12}P^{23}P^{31}$ und $\beta_1\beta_2\beta_3$ die Winkel, welche die Bogen $P^{31}P^{12}$, $P^{23}P^{12}$, $P^{23}P^{31}$ mit den gleichbenannten Sehnen bilden, so ergiebt sich

$$\alpha^{12} = P^{31}\overset{\frown}{P^{12}}P^{23} + \beta_2 - \beta_1$$

$$\alpha^{23} = P^{12}\overset{\frown}{P^{23}}P^{31} + \beta_2 - \beta_3$$

$$\alpha^{31} = P^{23}\overset{\frown}{P^{31}}P^{12} - \beta_3 - \beta_1,$$

folglich

$$\alpha^{12} + \alpha^{23} + \alpha^{31} = 180^0 - 2(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3).$$

Nun ist aber

$$\beta_1 = P^{31}\overset{\frown}{P_1^{23}}P^{12}$$

$$\beta_2 = 180^0 - P^{12}\overset{\frown}{P_2^{31}}P^{23} = 180^0 - P^{12}\overset{\frown}{P^{31}}P_1^{23}$$

$$\beta_3 = P^{23}\overset{\frown}{P_3^{12}}P^{31} = P_1^{23}\overset{\frown}{P^{12}}P^{31},$$

mithin

$$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = P^{31}\overset{\frown}{P_1^{23}}P^{12} + P^{12}\overset{\frown}{P^{31}}P_1^{23} + P_1^{23}\overset{\frown}{P^{12}}P^{31} - 180^0 = 0,$$

und demnach

$$\alpha^{12} + \alpha^{23} + \alpha^{31} = 180^0.$$

Wenn aber in einem Bogendreieck die Summe der Winkel 180^0 beträgt, so gehen bekanntlich die drei Bogen durch einen Punkt.

Da die ähnlichen Kreise k_1 und k_2 den Punkt P^{12} entsprechend gemein haben, so liegen entsprechende Punkte derselben auf Geraden, die durch T^{123} gehen. Es ist daher k_1 perspektivisch zu k_2 und ebenso zu k_3 mit T^{123} als Centrum der Perspektive, und insbesondere schneiden sich $\overline{P^{12}P_3^{12}}$, $\overline{P^{23}P_1^{23}}$, $\overline{P^{31}P_2^{31}}$ in T^{123}. — Bezeichnet man mit $A_1A_1A_3$ drei entsprechende Punkte von $S_1S_2S_3$, so gilt der Satz: Alle Punkte A_1 von S_1, welche auf der zugehörigen Geraden $\overline{A_2A_3}$ liegen, erfüllen den Kreis k_1 und die unendlich ferne Gerade, und alle endlichen Geraden, welche einen Punkt enthalten, dem in den beiden anderen Systemen Punkte auf derselben Geraden entsprechen, gehen durch T^{123}.

Beweis. Angenommen, A_1 sei ein Punkt von der Beschaffenheit, dass $A_1A_2A_3$ auf einer Geraden m liegen. Beschreibt man dann durch $P^{12}P^{31}A_1$ einen Kreis a_1, so gehen

die entsprechenden Kreise a_2 und a_3 resp. durch $P^{12}P_2^{31}A_2$ und $P_3^{12}P^{31}A_3$. Da a_1 und a_2 den Punkt P^{12} entsprechend gemein haben, so liegt ihr zweiter Schnittpunkt auf $\overline{A_1A_2}$, d. h. auf m. Ebenso müssen sich a_1 und a_3 auf m schneiden, und hieraus erkennt man, dass $a_1a_2a_3$ durch denselben Punkt von m gehen. Durch diesen Punkt gehen dann auch $\overline{P^{12}P_3^{12}}$ und $\overline{P^{31}P_2^{31}}$ als Verbindungslinien entsprechender Punkte von $a_1a_2a_3$; derselbe ist also identisch mit T^{123} und a_1 identisch mit k_1. Es liegt daher A_1 auf k_1 und T^{123} auf m.

Sind $O_1O_2O_3$ die Mittelpunkte von $k_1k_2k_3$, so hat man

$$\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{P_1^{23}P^{23}}} = \frac{\overline{O_1P^{12}}}{\overline{P_1^{23}P^{12}}}$$

und

$$\frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{P^{23}P_1^{23}}} = \frac{\overline{O_1P^{31}}}{\overline{P_1^{23}P^{31}}},$$

folglich

$$\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_3O_1}} = \frac{\overline{O_1P^{12}}}{\overline{O_1P^{31}}} \cdot \frac{\overline{P_1^{23}P^{31}}}{\overline{P_1^{23}P^{12}}},$$

d. h.

$$1) \qquad \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_3O_1}} = \frac{\overline{P_1^{23}P^{31}}}{\overline{P_1^{23}P^{12}}}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{P^{31}P_2^{31}}} = \frac{\overline{O_2P^{12}}}{\overline{P_2^{31}P^{12}}}$$

und

$$\frac{\overline{O_2O_3}}{\overline{P_2^{31}P^{31}}} = \frac{\overline{O_2P^{23}}}{\overline{P_2^{31}P^{23}}},$$

daher

$$2) \qquad \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_2O_3}} = \frac{\overline{O_2P^{12}}}{\overline{O_2P^{23}}} \cdot \frac{\overline{P_2^{31}P^{23}}}{\overline{P_2^{31}P^{12}}} = \frac{\overline{P_2^{31}P^{23}}}{\overline{P_2^{31}P^{12}}} = \frac{\overline{P^{31}P_1^{23}}}{\overline{P^{31}P^{12}}}.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt

$$\overline{O_1O_2} : \overline{O_2O_3} : \overline{O_3O_1} = \overline{P_1^{23}P^{31}} : \overline{P^{31}P^{12}} : \overline{P^{12}P_1^{23}},$$

d. h. die Dreiecke $O_1O_2O_3$ und $P_1^{23}P^{31}P^{12}$ sind einander ähnlich.

2. Definition des Systems Σ. Konstruktion der Punktpaare, welche in S_1 einem Punkte von Σ entsprechen. — Es seien wieder $A_1 A_2 A_3$ drei einander zugeordnete Punkte von $S_1 S_2 S_3$, ferner A der Mittelpunkt des durch $A_1 A_2 A_3$ gelegten Kreises. Dann ergiebt sich zu jedem Punkte A_1 von S_1 ein Punkt A durch die Bedingung $\overline{A_1 A} = \overline{A_2 A} = \overline{A_3 A}$, und alle so erhaltenen Punkte A bilden ein System Σ. Die Untersuchung der hierdurch definierten Verwandtschaft zwischen den Systemen S_1 und Σ wird im folgenden unsere Aufgabe sein.

Jedem reellen Punkte A_1 von S_1 entspricht im allgemeinen ein, aber auch nur ein reeller Punkt A von Σ als Schnittpunkt der Normalhalbierenden von $\overline{A_1 A_2}$ und $\overline{A_1 A_3}$. Es ist zunächst zu ermitteln, wieviel Punkte des Systems S_1 rückwärts einem in Σ beliebig gewählten Punkte A zugeordnet sind und wie man dieselben zu konstruieren hat.

Alle Punkte X_1 von S_1, für welche $\overline{A X_1} = \overline{A X_2}$ ist, erfüllen einen Kreis $\mathfrak{a}^{II}$. In der That, fasst man A als zu S_2 gehörig auf und konstruiert den in S_1 zugeordneten Punkt A_1^2, so entspricht einem beliebigen Kreise x_2 um A ein Kreis x_1 um A_1^2. Dann hat der Schnittpunkt X_1 der beiden Kreise, als Punkt von S_1 betrachtet, die Eigenschaft, dass für ihn $\overline{A X_1} = \overline{A X_2}$ ist, und es verhält sich

$$\overline{X_1 A_1^2} : \overline{X_1 A} = \overline{P^{12} A_1^2} : \overline{P^{12} A},$$

d. h. X_1 liegt auf einem Kreise $\mathfrak{a}^{II}$, der durch P^{12} geht und die Strecke $\overline{A_1^2 A}$ innen und aussen im Verhältnis $\overline{P^{12} A_1^2} : \overline{P^{12} A}$ teilt. Bezeichnet man das Verhältnis entsprechender Strecken in $S_1 S_2 S_3$ mit $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3$, so ist $\overline{P^{12} A_1^2} : \overline{P^{12} A}$ gleich $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$.

Um daher zu A einen entsprechenden Punkt in S_1 zu konstruieren, verfährt man in folgender Weise (Fig. 2): Man betrachtet A als gehörig zu S_2 und bestimmt den in S_1 entsprechenden Punkt A_1^2, sowie den Kreis $\mathfrak{a}^{II}$, der $\overline{A_1^2 A}$ innen und aussen im Verhältnis $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ teilt und dessen Mittelpunkt A^{II} auf $\overline{A_1^2 A}$ liegt. Hierauf fasst man A auf als gehörig zu S_3, bestimmt dazu A_1^3 in S_1 und den Kreis $\mathfrak{a}^{III}$ (mit dem Mittelpunkte A^{III}), der $\overline{A_1^3 A}$ nach dem Verhältnis $\varepsilon_1 : \varepsilon_3$ normal

schneidet. Treffen sich $\mathfrak{a}^{II}$ und $\mathfrak{a}^{III}$ in A_1 und A'_1, so sind dies die beiden Punkte, welche in S_1 dem Punkte A entsprechen. Hieraus folgt: Jedem reellen Punkte von Σ entsprechen in S_1 entweder zwei reelle, oder zwei zusammenfallende, oder zwei imaginäre Punkte. Die betrachtete Verwandtschaft ist daher als eine ein-zweideutige zu bezeichnen.

Alle Punkte von Σ, denen in S_1 zusammenfallende Punkte zugeordnet sind, erfüllen eine Kurve σ, welche mit Clebsch die Übergangskurve des Systems Σ genannt werden soll. Dieselbe teilt das System Σ in zwei Gebiete Σ' und Σ'', so dass allen reellen Punkten von Σ' reelle Punkte von S_1 und allen reellen Punkten von Σ'' imaginäre Punkte von S_1 entsprechen.

Zu jedem Punkte A_1 von S_1 existiert ein Punkt A'_1, dem in Σ derselbe Punkt A zugeordnet ist. Die Gesamtheit der Punkte A'_1 bildet ein System S'_1, und dann befinden sich S_1 und S'_1 in involutorischer Lage; denn fasst man A'_1 als zu S_1 gehörig auf, so entspricht ihm in S'_1 wiederum der Punkt A_1. Alle Punkte derjenigen Kurve s_1, welche in S_1 der Übergangskurve σ zugeordnet ist, sind selbstentsprechende Punkte von S_1 und S'_1.

3. Einführung der Punkte Ω und $\Omega^{II\,III}$. — Konstruiert man zu jedem Punkte A von Σ die beiden Kreismittelpunkte A^{II} und A^{III}, so erhält man zwei Mittelpunktssysteme Σ^{II} und Σ^{III}, die beide zu Σ ähnlich sind, und zwar haben Σ^{II} und Σ den Punkt P^{12}, Σ^{III} und Σ den Punkt P^{31} entsprechend gemein. Bezeichnet $\Omega^{II\,III}$ den reellen selbstentsprechenden Punkt von Σ^{II} und Σ^{III} und Ω den in Σ konjugierten Punkt, so sind demselben in S_1 die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte zugeordnet.

Betrachtet man die Punkte $P^{12}P^{31}P^{23}$ als gehörig zu Σ und giebt ihnen in diesem Sinne die Bezeichnungen $\Phi\Psi X$, so entsprechen denselben in Σ^{II} und Σ^{III} resp. die Punkte $\Phi^{II}\Psi^{II}X^{II}$ und $\Phi^{III}\Psi^{III}X^{III}$; dabei fällt Φ^{II} mit Φ, Ψ^{III} mit Ψ zusammen und die Punkte X^{II} und X^{III} liegen auf $\overline{T^{123}X}$.

(Fig. 3.) Es sind ferner dem Kreise ϑ, der durch $\Phi\Psi X$ gelegt wird, in Σ^{II} und Σ^{III} zwei Kreise ϑ^{II} und ϑ^{III} zugeordnet, die resp. durch $\Phi^{II}\Psi^{II}X^{II}$ und $\Phi^{III}\Psi^{III}X^{III}$ gehen. Dann haben ϑ und ϑ^{II} den Punkt P^{12} entsprechend gemein, folglich gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Kreise nach dem zweiten Schnittpunkte von ϑ und ϑ^{II}. Das Analoge gilt für ϑ und ϑ^{III} und man erkennt daher leicht, dass sich $\vartheta\vartheta^{II}\vartheta^{III}$ und $\overline{\Phi^{II}\Phi^{III}}$, $\overline{\Psi^{II}\Psi^{III}}$, $\overline{X^{II}X^{III}}$ in demselben Punkte Θ schneiden. Alsdann sind auch ϑ^{II} und ϑ^{III} aus Θ perspektivisch auf einander bezogen, folglich ist ihr zweiter Schnittpunkt der selbstentsprechende Punkt Ω^{IIIII} von Σ^{II} und Σ^{III}. Der in Σ konjugierte Punkt Ω wird erhalten, indem man Ω^{IIIII} von Θ auf ϑ projiciert. Die vier Punkte $P^{12}P^{23}P^{31}\Omega$ liegen demnach auf der Peripherie eines Kreises ϑ.

4. Grundlagen der analytischen Behandlung. — Bezeichnet man mit x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 die rechtwinkligen Koordinaten dreier konjugierten Punkte $A_1A_2A_3$ und setzt man allgemein

$$\begin{array}{l|l} x_2 = \mu(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi) & x_3 = \nu(x_1\cos\psi - y_1\sin\psi + a) \\ y_2 = \mu(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) & y_3 = \nu(x_1\sin\psi + y_1\cos\psi), \end{array}$$

so sind hierdurch die Systeme $S_1S_2S_3$ vollständig definiert. Der Punkt P^{12} ist Anfangspunkt der Koordinaten; für P_3^{12} ist $x_3 = \nu a$, $y_3 = 0$. Dann ergiebt sich für die Normalhalbierende von $\overline{A_1A_2}$ die Gleichung

$$1)\quad 2[(1-\mu\cos\varphi)x_1+\mu\sin\varphi\,.\,y_1]\xi - 2[\mu\sin\varphi\,.\,x_1-(1-\mu\cos\varphi)y_1]\eta - (1-\mu^2)(x_1^2+y_1^2) = 0,$$

und für die Normalhalbierende von $\overline{A_1A_3}$

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} 2[(1-\nu\cos\psi)x_1 + \nu\sin\psi\,.\,y_1 - \nu a]\,\xi \\ \quad - 2[\nu\sin\psi\,.\,x_1 - (1-\nu\cos\psi)y_1]\,\eta \\ \quad - (1-\nu^2)(x_1^2+y_1^2) + 2\nu^2 a\cos\psi\,.\,x_1 \\ \quad - 2\nu^2 a\sin\psi\,.\,y_1 + \nu^2a^2 = 0. \end{array}\right.$$

Versteht man hierbei unter $\xi\eta$ die Koordinaten des Punktes A, so sind 1) und 2) die Definitionsgleichungen für die Verwandtschaft der Systeme S_1 und Σ.

Für den Fall, dass der Punkt $A(\xi\eta)$ gegeben ist, repräsentiert Gleichung 1) den Kreis $\mathfrak{a}^{II}$, 2) den Kreis $\mathfrak{a}^{III}$. Setzt man dann an Stelle der laufenden Koordinaten $x_1 y_1$ kurz xy, so erhält man resp. als Gleichungen von $\mathfrak{a}^{II}$ und $\mathfrak{a}^{III}$

$$3)\quad \begin{cases} (1-\mu^2)(x^2+y^2) - 2[(1-\mu\cos\varphi)\xi - \mu\sin\varphi \,.\, \eta]x \\ \quad -2[\mu\sin\varphi \,.\, \xi + (1-\mu\cos\varphi)\eta]y = 0 \end{cases}$$

und

$$4)\quad \begin{cases} (1-\nu^2)(x^2+y^2) \\ \quad -2[(1-\nu\cos\psi)\xi - \nu\sin\psi \,.\, \eta + \nu^2 a\cos\psi]x \\ \quad -2[\nu\sin\psi \,.\, \xi + (1-\nu\cos\psi)\eta - \nu^2 a\sin\psi]y \\ \quad +\nu a(2\xi - \nu a) = 0. \end{cases}$$

Aus 3) und 4) folgt

$$5)\quad \begin{cases} 2\{(1-\nu^2)[(1-\mu\cos\varphi)\xi - \mu\sin\varphi \,.\, \eta] \\ \quad -(1-\mu^2)[(1-\nu\cos\psi)\xi - \nu\sin\psi \,.\, \eta + \nu^2 a\cos\psi]\}x \\ \quad +2\{(1-\nu^2)[\mu\sin\varphi \,.\, \xi + (1-\mu\cos\varphi)\eta] \\ \quad -(1-\mu^2)[\nu\sin\psi \,.\, \xi + (1-\nu\cos\psi)\eta - \nu^2 a\sin\psi]\}y \\ \quad +(1-\mu^2)(2\nu a\xi - \nu^2 a^2) = 0 \end{cases}$$

als Gleichung der Geraden, welche die zu A konjugierten Punkte A_1 und A'_1 verbindet. Gleichung 5) definiert ein reciprokes Entsprechen zwischen den Punkten A des Systems Σ und den Geraden $\overline{A_1 A'_1}$ des Systems S_1 in der Weise, dass jedem Punkte A eine, aber auch nur eine Gerade $\overline{A_1 A'_1}$ und jeder Geraden $\overline{A_1 A'_1}$ ein, aber auch nur ein Punkt A zugeordnet ist. Allen Punkten A, die auf einer Geraden liegen, entsprechen also in S_1 Punktpaare, die auf den Strahlen eines Strahlenbüschels enthalten sind. Ferner ergiebt sich hieraus die Bemerkung, dass auf jeder Geraden des Systems S_1 immer ein, aber auch nur ein Paar von Punkten existiert, denen in Σ ein und derselbe Punkt konjugiert ist. Je nachdem dieses Punktpaar aus zwei getrennten reellen, oder zwei zusammenfallenden, oder zwei imaginären Punkten besteht, liegt der in Σ konjugierte Punkt im Gebiete Σ', oder auf der Übergangskurve σ, oder im Gebiete Σ''.

Der Ort aller Punkte A, die auf der zugehörigen Geraden $\overline{A_1 A'_1}$ liegen, wird erhalten, indem man in 5) $x = \xi$, $y = \eta$ setzt. Dann ergiebt sich

$$6)\quad \begin{cases} 2\,[(1-\nu^2)(1-\mu\cos\varphi)-(1-\mu^2)(1-\nu\cos\psi)]\,(\xi^2+\eta^2) \\ \quad +2\,(1-\mu^2)(1-\nu\cos\psi)\,\nu a\xi+2\,(1-\mu^2)\,\nu^2 a\sin\psi\,.\,\eta \\ \quad -(1-\mu^2)\,\nu^2 a^2=0. \end{cases}$$

Bei der zwischen den Punkten von Σ und den Geraden von S_1 bestehenden Reciprocität ist demnach die eine Ordnungskurve (der Polarkegelschnitt) ein Kreis. Das soeben erhaltene Resultat folgt übrigens auch daraus, dass die imaginären Kreispunkte zu den Punkten A gehören, die auf der zugeordneten Geraden $A_1\overline{A'_1}$ liegen.

Die Übergangskurve σ. Ist $A(\xi\eta)$ ein Punkt von σ, so werden die Kreise $\mathfrak{a}^{II}$ und $\mathfrak{a}^{III}$ einander berühren. Sind nun zwei Kreise gegeben durch die Gleichungen

$$\xi^2+\eta^2-2\alpha_1\xi-2\beta_1\eta=0$$
$$\xi^2+\eta^2-2\alpha_2\xi-2\beta_2\eta+q_2=0,$$

so berühren sich dieselben (in einem reellen Punkte, also ohne konzentrisch zu sein) unter der Bedingung

$$4\,(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2-4\,(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\,q_2-q_2{}^2=0.$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\alpha_1\beta_1\ \alpha_2\beta_2 q_2$ die entsprechenden Werte aus 3) und 4), so erhält man schliesslich die Gleichung der Übergangskurve in der Form

$$7)\quad \begin{cases} 4\{[\mu\nu\sin(\varphi-\psi)-\mu\sin\varphi+\nu\sin\psi]\,(\xi^2+\eta^2)-\nu^2 a\,[\sin\psi \\ \quad +\mu\sin(\varphi-\psi)]\,\xi-\nu^2 a\,[\cos\psi-\mu\cos(\varphi-\psi)]\,\eta\}^2 \\ \quad -4\{(1-\nu^2)(1-2\mu\cos\varphi+\mu^2)\,(\xi^2+\eta^2) \\ \quad -(1-\mu^2)\,[(1-\mu\cos\varphi-\nu\cos\psi+\mu\nu\cos(\varphi-\psi))\,(\xi^2+\eta^2) \\ \quad +\nu^2 a\,(\cos\psi-\mu\cos(\varphi-\psi))\,\xi-\nu^2 a\,(\sin\psi \\ \quad +\mu\sin(\varphi-\psi))\,\eta]\}\,(2\nu a\xi-\nu^2 a^2) \\ \quad -(1-\mu^2)^2\,(2\nu a\xi-\nu^2 a^2)^2=0. \end{cases}$$

Die Übergangskurve ist demnach von der vierten Ordnung. Sie hat, wie aus ihrer Gleichung sofort folgt, die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten und ist daher als eine bicirkulare Kurve zu bezeichnen.

Die Punkte Ω und $\Omega^{II\,III}$. Da dem Punkte Ω zwei konzentrische Kreise $\mathfrak{a}^{II}$ und $\mathfrak{a}^{III}$ entsprechen, so ergeben sich zur Bestimmung seiner Koordinaten $\xi_\omega\eta_\omega$ aus 3) und 4) die Gleichungen

$$8)\quad \frac{(1-\mu\cos\varphi)\,\xi_\omega-\mu\sin\varphi\,.\,\eta_\omega}{1-\mu^2}=\frac{(1-\nu\cos\psi)\,\xi_\omega-\nu\sin\psi\,.\,\eta_\omega+\nu^2 a\cos\psi}{1-\nu^2},$$

$$9)\quad \frac{\mu\sin\varphi\,.\,\xi_\omega+(1-\mu\cos\varphi)\,\eta_\omega}{1-\mu^2}=\frac{\nu\sin\psi\,.\,\xi_\omega+(1-\nu\cos\psi)\,\eta_\omega-\nu^2 a\sin\psi}{1-\nu^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(1-\nu^2)(1-\mu\cos\varphi)-(1-\mu^2)(1-\nu\cos\psi)=U$$
$$(1-\nu^2)\,\mu\sin\varphi-(1-\mu^2)\,\nu\sin\psi=V,$$

so folgt aus 8) und 9)

$$10)\qquad \xi_\omega=\frac{U\cos\psi-V\sin\psi}{U^2+V^2}(1-\mu^2)\nu^2 a,$$

$$11)\qquad \eta_\omega=-\frac{U\sin\psi+V\cos\psi}{U^2+V^2}(1-\mu^2)\nu^2 a.$$

Durch Substitution dieser Werte in die linken Seiten der Gleichungen 8) und 9) ergeben sich endlich die Koordinaten des Punktes $\Omega^{\text{II III}}$ in der Form

$$12)\quad \xi_\omega^{\text{II III}}=\frac{U[\cos\psi-\mu\cos(\varphi+\psi)]-V[\sin\psi-\mu\sin(\varphi+\psi)]}{U^2+V^2}\nu^2 a,$$

$$13)\quad \eta_\omega^{\text{II III}}=-\frac{U[\sin\psi-\mu\sin(\varphi+\psi)]+V[\cos\psi-\mu\cos(\varphi+\psi)]}{U^2+V^2}\nu^2 a.$$

5. Selbstentsprechende Punkte von S_1 und Σ. — Da die Systeme $S_1S_2S_3$ die beiden imaginären Kreispunkte entsprechend gemein haben, so können diese Punkte in gewissem Sinne auch für die Systeme S_1 und Σ als selbstentsprechend bezeichnet werden. Weist man sie nämlich dem System Σ zu, so ist jedem von ihnen in S_1 derselbe Punkt, und dieser allein, zugeordnet; überdies giebt es jedoch in Σ noch einen, aber auch nur einen reellen Punkt Ω, dem in S_1 die imaginären Kreispunkte entsprechen. Ob in Σ noch andere, und zwar imaginäre Punkte existieren, denen in S_1 die imaginären Kreispunkte konjugiert sind, ist auf analytischem Wege leicht zu entscheiden.

Eliminiert man y zwischen den Gleichungen 3) und 5) des vorigen Artikels, so ergiebt sich nach kurzer Rechnung für x eine quadratische Gleichung von der Form

$$4(1-\mu^2)\{(U^2+V^2)(\xi^2+\eta^2) - 2(1-\mu^2)\nu a(U\cos\psi - V\sin\psi)\xi$$
$$+2(1-\mu^2)\nu a(U\sin\psi + V\cos\psi)\eta$$
$$+(1-\mu^2)^2\nu^4 a^2\}x^2 + f(\xi,\eta)\,.\,x + F(\xi,\eta) = 0,$$

wobei U und V die früher definierten Werte haben und $f(\xi,\eta)$ und $F(\xi,\eta)$ gewisse Funktionen von ξ und η bedeuten. Setzt man noch

$$\frac{f(\xi,\eta)}{4(1-\mu^2)(U^2+V^2)} = f'(\xi,\eta), \quad \frac{F(\xi,\eta)}{4(1-\mu^2)(U^2+V^2)} = F'(\xi,\eta)$$

und berücksichtigt man die in Art. 4 für ξ_ω und η_ω erhaltenen Resultate, so geht die vorige Gleichung über in

14) $$[(\xi-\xi_\omega)^2 + (\eta-\eta_\omega)^2]\,x^2 + f'(\xi,\eta)\,.\,x + F'(\xi,\eta) = 0.$$

Genügen demnach die Koordinaten ξ und η eines Punktes A der Gleichung

$$(\xi-\xi_\omega)^2 + (\eta-\eta_\omega)^2 = 0,$$

d. h. liegt der Punkt A auf dem Punktkreise um Ω, oder was dasselbe ist, auf einer der imaginären Geraden, die Ω mit den beiden imaginären Kreispunkten verbinden, so wird der Koefficient von x^2 gleich Null, d. h. es wird ein Wert von x und folglich nach 5) auch ein Wert von y gleich unendlich. Dann liegt also einer der beiden zu A konjugierten Punkte auf der unendlich fernen Geraden.

Es sei nun ζ diejenige Gerade, die Ω mit dem Kreispunkte Z verbindet. Dann entsprechen allen Punkten A von ζ Punktpaare, die auf den Strahlen eines Strahlenbüschels enthalten sind, und da zu Ω ein unendlich ferner Strahl gehört, so müssen sich alle jene Strahlen auf der unendlich fernen Geraden schneiden. Hieraus folgt zunächst, dass allen Punkten von ζ derselbe unendlich ferne Punkt in S_1 zugeordnet ist, und weiter, dass dieser Punkt mit einem der imaginären Kreispunkte zusammenfällt.

Es ist endlich noch zu untersuchen, welcher der beiden imaginären Kreispunkte den Punkten von ζ einerseits entspricht. — Die beiden Geraden, welche Ω mit den Kreispunkten verbinden, haben die Gleichungen

15) $$\xi + i\eta = \xi_\omega + i\eta_\omega$$

16) $$\xi - i\eta = \xi_\omega - i\eta_\omega.$$

Versteht man unter ξ diejenige Gerade, welche durch Gleichung 15) definiert ist, so kann unter Einführung der für ξ_∞ und η_∞ gefundenen Werte die Gleichung von ξ auf die Form gebracht werden

$$\xi + i\eta = \frac{(U - iV)\cos\psi - (V + iU)\sin\psi}{U^2 + V^2}(1 - \mu^2)\nu a,$$

oder

$$\xi + i\eta = \frac{\cos\psi - i\sin\psi}{U + iV}(1 - \mu^2)\nu a,$$

oder endlich

17) $$V\xi + U\eta + (1-\mu^2)\nu^2 a\sin\psi = i[U\xi - V\eta - (1-\mu^2)\nu^2 a\cos\psi].$$

Unter Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen U und V geht ferner die Gleichung der Geraden $\overline{A_1 A'_1}$ 5) über in

18) $$\begin{cases} 2[U\xi - V\eta - (1-\mu^2)\nu^2 a\cos\psi]x \\ +2[V\xi + U\eta + (1-\mu^2)\nu^2 a\sin\psi]y + (1-\mu^2)(2\nu a\xi - \nu^2 a^2) = 0. \end{cases}$$

Beziehen sich hierbei $\xi\eta$ auf einen Punkt A der Geraden ξ, so erhält mit Rücksicht auf 17) die Gleichung der zugehörigen Geraden $\overline{A_1 A'_1}$ die Form

$$x + iy = const.$$

Es gehen demnach für alle Punkte A auf ξ die zugehörigen Geraden $\overline{A_1 A'_1}$ durch denjenigen Kreispunkt Z, nach welchem auch die Gerade ξ (15) gezogen ist, d. h. allen Punkten von ξ ist einerseits der Punkt Z zugeordnet.*

Als Resultat der bisherigen Betrachtungen ergiebt sich der Satz: Die Systeme S_1 und Σ haben in gewissem Sinne die imaginären Kreispunkte entsprechend gemein. Fasst man nämlich einen der Kreispunkte auf als gehörig zu Σ, so ist ihm in S_1 derselbe Punkt, und kein andrer zugeordnet; weist man ihn dagegen dem System S_1 zu, so entsprechen ihm in Σ alle Punkte derjenigen Geraden, die ihn mit Ω verbindet.

Zwei weitere selbstentsprechende Punkte der Systeme S_1 und Σ ergeben sich in folgender Weise. Bekanntlich ist für irgend zwei konjugierte Punkte A_1 und A_2 von S_1 und S_2

$$\overline{A_1 A_2} = const.\ \overline{P^{12} A_1}.$$

* Andrerseits eine imaginäre Kurve dritter Ordnung. Vergl. Art. 11.

Es liegen daher alle die Punkte A_1, für welche $\overline{A_1 A_2} = 0$ ist, auf dem Punktkreis P^{12}, und ebenso erfüllen diejenigen Punkte B_1, für welche $B_1 B_3 = 0$ ist, den Punktkreis P^{31}. Sind J_1 und K_1 die beiden Schnittpunkte dieser Punktkreise, also die imaginären Grenzpunkte des Kreisbüschels durch P^{12} und P^{31}, so ist $J_1 J_2 = J_1 J_3 = \overline{K_1 K_2} = \overline{K_1 K_3} = 0$, und fasst man die Punkte J_1 und K_1 auf als zu Σ gehörig und bezeichnet sie demgemäss noch mit I und K, so hat man

$$\overline{\mathsf{I} J_1} = \overline{\mathsf{I} J_2} = \overline{\mathsf{I} J_3} = 0,$$
$$\overline{\mathsf{K} K_1} = \overline{\mathsf{K} K_2} = \overline{\mathsf{K} K_3} = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Systeme S_1 und Σ die beiden Punkte I und K entsprechend gemein haben, wobei aber zu beachten ist, dass jedem dieser Punkte, wenn er dem Systeme Σ zugeteilt wird, in S_1 noch ein zweiter imaginärer Punkt J'_1 resp. K'_1 entspricht.*

Zu demselben Resultat gelangt man auch auf analytischem Wege, wenn man in den Gleichungen 3) und 4) $x = \xi$, $y = \eta$ setzt. Dann ergeben sich für die selbstentsprechenden Punkte von S_1 und Σ die Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 = 0,$$
$$\left\{\xi - \frac{\nu a\,(1 - \nu\,cos\psi)}{1 - 2\nu\,cos\psi + \nu^2}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\nu^2 a\,sin\psi}{1 - 2\nu\,cos\psi + \nu^2}\right\}^2 = 0,$$

von denen die erste den Punktkreis um P^{12}, die zweite den Punktkreis um P^{31} darstellt. Die Systeme S_1 und Σ haben demnach die sämtlichen Schnittpunkte der beiden Punktkreise entsprechend gemein.

Da im übrigen keinem Punkte A_1 in S_2 und S_3 Punkte zugeordnet sind, die beide von A_1 die Entfernung Null besitzen, so erhält man den Satz: Die Systeme S_1 und Σ haben in dem vorher angegebenen Sinne vier selbstentsprechende Punkte, nämlich die beiden imaginären Kreispunkte und die beiden andern imaginären Schnittpunkte der Punktkreise um P^{12} und P^{31}.

6. Unendlich ferne Punkte. — Jedem Punkte A_1 des Kreises k_1 entspricht in Σ der unendlich ferne

* Die Punkte I und K liegen nämlich nicht auf der Übergangskurve, gehören vielmehr zu den Brennpunkten derselben. Vergl. Art. 19.

Punkt A^∞ einer Geraden, die zu $\overline{A_1 T^{123}}$ normal ist. (Nach Art. 1.) Es ist ferner jedem unendlich fernen Punkte $B_1^\varkappa$ wiederum ein unendlich ferner Punkt B^∞ zugeordnet. Die beiden Systeme S_1 und Σ haben daher die unendlich ferne Gerade und auf dieser die imaginären Kreispunkte entsprechend gemein; sie verhalten sich also in Bezug auf ihre unendlich fernen Elemente wie zwei ähnliche Systeme. Sind demnach $b_1 c_1 \ldots$ die Strahlen eines Strahlenbüschels, welche die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten $B_1^\infty C_1^\infty \ldots$ angeben, und $\beta\gamma \ldots$ Strahlen eines Büschels, die nach den entsprechenden Punkten $B^\varkappa \Gamma^\infty \ldots$ gehen, so sind die Büschel $b_1 c_1 \ldots$ und $\beta\gamma \ldots$ kongruent, und es bilden daher b_1 und β, c_1 und γ u. s. w. einen konstanten Winkel ι.* Diese Bemerkung kann dazu dienen, um zu einem gegebenen unendlich fernen Punkte C_1^∞ den entsprechenden Γ^∞ zu konstruieren, sobald vorher zu irgend einem Punkte B_1^∞ die Lage des konjugierten B^∞ bekannt ist.

Jedem unendlich fernen Punkte von Σ entsprechen in S_1 rückwärts wieder zwei Punkte, von denen der eine der unendlich fernen Geraden, der andere dem Kreise k_1 angehört.

7. Über die Geraden, die in Σ den Punkten $P^{12} P_1^{23} P^{31}$ entsprechen. — Es seien $\pi^{12} \pi^{23} \pi^{31}$ resp. die Normalhalbierenden der Strecken $\overline{P^{12} P_3^{12}}$, $\overline{P^{23} P_1^{23}}$, $\overline{P^{31} P_2^{31}}$ und $\Pi^1 \Pi^2 \Pi^3$ die Eckpunkte des von $\pi^{12} \pi^{23} \pi^{31}$ gebildeten Dreiecks, so dass allgemein Π^i den Schnittpunkt von π^{hi} und π^{ik} bezeichnet. (Fig. 4.) Dann gelten die folgenden Sätze: Den Punkten $P^{12} P_1^{23} P^{31}$ des Systems S_1 entsprechen in Σ resp. sämtliche Punkte der Geraden $\pi^{12} \pi^{23} \pi^{31}$. Den Punkten $\Pi^1 \Pi^2 \Pi^3$ in Σ sind in S_1 resp. die Punktpaare $P^{12} P^{31}$, $P^{12} P_1^{23}$, $P_1^{23} P^{31}$ zugeordnet.

Die beiden Dreiecke $\Pi^1 \Pi^2 \Pi^3$ und $P_1^{23} P^{31} P^{12}$ sind einander ähnlich. Es ist nämlich

$$\pi^{12} \widehat{\pi^{31}} = P^{31} \widehat{T^{123}} P^{12},$$

weil die Schenkel dieser Winkel auf einander senkrecht stehen, und

---

* Analyt. Beweis siehe Art. 25.

$$P^{31}\overset{\frown}{T^{123}}P^{12} = P^{31}\overset{\frown}{P_1^{23}}P^{12}$$

als Peripheriewinkel auf demselben Bogen, folglich

$$\pi^{12}\overset{\frown}{\pi^{31}} = P^{31}\overset{\frown}{P_1^{23}}P^{12},$$

u. s. f.

Da zu jedem Punkte A_1 von k_1 der auf k_2 entsprechende Punkt A_2 in der Geraden $\overline{A_1 T^{123}}$ liegt, so erfüllen die Mittelpunkte all' dieser Strecken $\overline{A_1 A_2}$ einen Kreis k_{12}, der durch T^{123} und P^{12} geht, und die Normalhalbierenden der genannten Strecken schneiden sich alle in einem Punkte von k_{12}. Dieser Punkt ist aber identisch mit Π^3, weil π^{23} und π^{31} zwei der in Rede stehenden Normalhalbierenden sind, folglich ist $\overline{T^{123}\Pi^3}$ ein Durchmesser von k_{12} und $T^{123}\overset{\frown}{P^{12}}\Pi^3$ ein Rechter. Es ist also $\overline{P^{12}\Pi^3}$ parallel zu π^{12}. Ebenso zeigt man, dass $\overline{P^{23}\Pi^1} \parallel \pi^{23}$ und $P^{31}\overline{\Pi^2} \parallel \pi^{31}$ ist.

---

8. Abbildung einer Geraden von S_1 auf das System Σ. — Um zu einer Geraden g_1 des Systems S_1 die in Σ konjugierte Kurve γ zu bestimmen, hat man zu den Punkten $A_1 B_1 \ldots$ der Punktreihe, deren Träger g_1 ist, einzeln die zugeordneten Punkte AB... zu konstruieren. Versteht man unter A_{12} und A_{31} resp. die Mittelpunkte der Strecken $\overline{A_1 A_2}$ und $\overline{A_3 A_1}$ und unter $\mathfrak{a}_{12}$ und $\mathfrak{a}_{31}$ resp. die in diesen Punkten zu den betreffenden Strecken errichteten Normalen, so sind $A_{12} B_{12} \ldots$ und $A_{31} B_{31} \ldots$ ähnliche geradlinige Punktreihen, und die Geraden $\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12}\ldots$ und $\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{b}_{31}\ldots$, welche die Kurve γ erzeugen, bilden zwei projektivische Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die einen Strahl, nämlich die unendlich ferne Gerade, entsprechend gemein haben. Die Kurve γ ist demnach von der dritten Ordnung und, da g_1 und γ eindeutig auf einander bezogen sind, vom Geschlecht Null. Sie hat mit der unendlich fernen Geraden entweder einen reellen und zwei imaginäre, oder einen reellen und zwei zusammenfallende, oder drei reelle Punkte gemein, je nachdem der Kreis k_1 die Gerade g_1 ausschliesst, berührt oder in zwei reellen Punkten schneidet. Je nachdem das Punktpaar auf g_1, dem in Σ ein und derselbe Punkt konjugiert ist, aus zwei getrennten reellen, oder zwei

zusammenfallenden, oder zwei imaginären Punkten besteht (Art. 4), hat γ einen Knotenpunkt, oder einen Rückkehrpunkt auf σ, oder einen isolierten Punkt im Gebiete Σ''.

Die Übergangskurve hat mit γ zwölf Punkte gemein. Da aber jedem reellen Punkte von g_1 ein Punkt im Gebiete Σ' oder auf σ entspricht, so werden jene zwölf Punkte sechs mal zu je zwei zusammenfallen. Es ergiebt sich demnach der Satz: Jeder Geraden g_1 von S_1 entspricht in Σ im allgemeinen eine Unikursalkurve dritter Ordnung, welche die Übergangskurve sechs mal berührt.*

Den sechs Berührungspunkten sind in S_1 die sechs Punkte zugeordnet, in denen g_1 die zu σ konjugierte Kurve s_1 schneidet. Die Kurve s_1, welche in S_1 der Übergangskurve entspricht, ist also von der sechsten Ordnung.

Sind in S_1 zwei Geraden a_1 und b_1 gegeben, so entsprechen denselben in Σ zwei Unikursalkurven dritter Ordnung α und β, welche neun Punkte mit einander gemein haben. Unter diesen neun Punkten ist derjenige Punkt M ausgezeichnet, welcher dem Schnittpunkte M_1 von a_1 und b_1 entspricht. In der That, bezeichnet man resp. mit A und B die Doppelpunkte von α und β, so sind denselben zwei Punktpaare $A_1A'_1$ und und $B_1B'_1$ auf a_1 und b_1 konjugiert, und allen übrigen Punkten von $\overline{AB}$ entsprechen in S_1 Punktpaare auf Strahlen, die durch M_1 gehen. Das Punktpaar $M_1M'_1$ ist auch auf einem solchen Strahle enthalten, folglich liegt M auf $\overline{AB}$. Sind also α und β zwei Kurven, welche den Geraden a_1 und b_1 des Systems S_1 entsprechen, so geht die Verbindungslinie ihrer Doppelpunkte durch einen Schnittpunkt dieser Kurven, nämlich durch den Punkt, welcher dem Schnittpunkte von a_1 und b_1 konjugiert ist.**

9. Abbildung einer Geraden von Σ auf das System S_1. — Es sei in Σ eine Gerade φ gegeben; es soll

---

* Dabei kann einer der sechs Berührungspunkte auch durch einen Rückkehrpunkt von γ ersetzt werden. Vergl. Art. 15.

** Vergl. Clebsch, Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abelschen Funktionen. Math. Annalen, Bd. III, pag. 45—60.

diejenige Kurve f_1 bestimmt werden, welche der Geraden φ in S_1 entspricht. Konstruiert man zu den Punkten AB... von φ die entsprechenden Punktpaare $A_1A'_1$, $B_1B'_1$..., so bilden die zugehörigen Kreismittelpunkte $\mathsf{A}^{\mathrm{II}}\mathsf{B}^{\mathrm{II}}$... und $\mathsf{A}^{\mathrm{III}}\mathsf{B}^{\mathrm{III}}$... ähnliche Punktreihen und f_1 ergiebt sich als Erzeugnis zweier ähnlichen Kreisbüschel $\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\mathfrak{b}^{\mathrm{II}}$... und $\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\mathfrak{b}^{\mathrm{III}}$..., von denen das erste P^{12} und einen Punkt U, das zweite P^{31} und einen Punkt V zu Grundpunkten hat. (Fig. 5.) Die Kurve f_1 ist demnach von der dritten Ordnung; sie geht durch $P^{12}P^{31}UV$ und durch die beiden imaginären Kreispunkte. Auf f_1 und zugleich auf k_1 liegt auch der Schnittpunkt W von $P^{12}U$ und $P^{31}V$, denn dem unendlich fernen Punkte von φ ist einerseits ein unendlich ferner Punkt, andrerseits der Punkt W zugeordnet. Da ferner dem Schnittpunkte von φ mit π^{23} einerseits der Punkt P_1^{23} entspricht, so ist P_1^{23} ebenfalls auf f_1 enthalten. Die Geraden $A_1A'_1$, $B_1B'_1$... schneiden sich sämtlich in einem Punkte von f_1.

In dem Kreisbüschel $\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\mathfrak{b}^{\mathrm{II}}$... giebt es vier Kreise, welche die entsprechenden Kreise des Büschels $\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\mathfrak{b}^{\mathrm{III}}$... berühren.* Zu diesen Kreisen gehören auf der Geraden φ vier Punkte, denen je zwei zusammenfallende Punkte der Kurve f_1 entsprechen, also die Schnittpunkte von φ mit der Übergangskurve. Es wird hierdurch der schon früher bewiesene Satz bestätigt, dass die Kurve σ von der vierten Ordnung ist.

In Fig. 5 schneidet die Gerade φ die Übergangskurve in vier reellen Punkten, darum enthält φ zwei Strecken, denen imaginäre Punkte von f_1 zugeordnet sind, und die Kurve f_1 zerfällt deshalb in ein Oval und einen unendlichen Ast.

---

* Die beiden Kreise

$$S \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + Q = 0,$$
$$S' \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + Q' = 0$$

berühren einander unter der Bedingung

$$4(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 - 4(\alpha - \alpha')(\alpha Q' - \alpha' Q) - 4(\beta - \beta')(\beta Q' - \beta' Q) - (Q - Q')^2 = 0.$$

Werden nun zwei entsprechende Kreise $\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}$ der beiden Kreisbüschel repräsentiert durch die beiden Gleichungen

$$S - \varkappa T = 0, \qquad S' - \varkappa T' = 0,$$

so ergiebt sich als Bedingung dafür, dass $\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}$ einander berühren, eine Gleichung, die den Parameter $\varkappa$ in der vierten Potenz enthält.

Der Kreis $\mathfrak{a}^{II}$ hat mit der Kurve f_1 sechs Punkte gemein, nämlich $P^{12} U A_1 A'_1$ und die beiden imaginären Kreispunkte Z und Z'. Nimmt man nun an, die Gerade φ gehe durch den früher definierten Punkt Ω, so gehören zu Ω zwei konzentrische Kreise $\mathfrak{o}^{II}$ und $\mathfrak{o}^{III}$, und dann berührt $\mathfrak{o}^{II}$ die Kurve f_1 in den imaginären Kreispunkten. Die imaginären Asymptoten $Z\,\Omega^{II\,III}$ und $Z'\,\Omega^{II\,III}$ des Kreises $\mathfrak{o}^{II}$ sind also in diesem Falle zugleich die Asymptoten von f_1, und ihr reeller Schnittpunkt $\Omega^{II\,III}$ ist daher als Centrum von f_1 zu bezeichnen.

Denkt man sich ferner durch einen Punkt A im System Σ zwei beliebige Geraden μ und ν gezogen, so entsprechen denselben in S_1 zwei Kurven dritter Ordnung m_1 und n_1, die ausser den Punkten $A_1 A'_1 P^{12} P^{31} P_1^{23} Z Z'$ keinen Punkt mit einander gemein haben. Da sich aber zwei Kurven dritter Ordnung stets in neun Punkten schneiden, so schliesst man hieraus, dass sich m_1 und n_1 in zwei von jenen sieben Punkten, und zwar in Z und Z' berühren. Es entsprechen daher überhaupt allen Geraden von Σ in S_1 Kurven dritter Ordnung mit gemeinschaftlichen imaginären Asymptoten; ihr gemeinsames Centrum ist nach der vorangeschickten Bemerkung der Punkt $\Omega^{II\,III}$. Daher der Satz: Den Geraden von Σ entsprechen in S_1 im allgemeinen Kurven dritter Ordnung, welche durch $P^{12} P_1^{23} P^{31}$ gehen und in den imaginären Kreispunkten resp. die Geraden $\overline{Z\,\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\,\Omega^{II\,III}}$ berühren.

Allen durch Ω gehenden Geraden von Σ sind in S_1 Kurven dritter Ordnung konjugiert, die in jedem der imaginären Kreispunkte drei zusammenfallende Punkte mit einander gemein haben.

10. Dasselbe in analytischer Behandlung. — Aus den Gleichungen 1) und 2) (Art. 4) ergeben sich für die Koordinaten $\xi\eta$ eines Punktes A die Werte

$$19)\quad \left\{ \begin{array}{c} \xi = -\frac{1}{2} \\ \varkappa \dfrac{(Vx-Uy)(x^2+y^2) - \nu^2 a\,[2\cos\psi \,.\, x - 2\sin\psi \,.\, y + a]\,[\mu \sin\varphi \,.\, x - (1-\mu\cos\varphi)\,y]}{[(1-\mu\cos\varphi)\,\nu\sin\psi - \mu\sin\varphi\,(1-\nu\cos\psi)]\,(x^2+y^2) + \nu a\,[\mu\sin\varphi \,.\, x - (1-\mu\cos\varphi)\,y]} \end{array} \right.,$$

$$20)\quad \left\{ \begin{array}{c} \eta = -\frac{1}{2} \\ \varkappa \dfrac{[Ux+Vy+(1-\mu^2)\,\nu a\,](x^2+y^2) - \nu^2 a\,[2\cos\psi . x - 2\sin\psi . y + a]\,[(1-\mu\cos\varphi)x + \nu\sin\psi . y]}{[(1-\mu\cos\varphi)\,\nu\sin\psi - \mu\sin\varphi\,(1-\nu\cos\psi)]\,(x^2+y^2) + \nu a\,[\mu\sin\varphi \,.\, x - (1-\mu\cos\varphi)\,y]} \end{array} \right.,$$

wobei xy die Koordinaten des zu A konjugierten Punktes A_1 bezeichnen. Ist dann die Gerade φ in Σ gegeben durch die Gleichung

$$p\xi + q\eta + 1 = 0,$$

so entspricht derselben in S_1 eine Kurve f_1, deren Gleichung sich auf die Form bringen lässt

$$21)\quad \begin{cases} \{(Vp+Uq)x-(Up-Vq)y\}(x^2+y^2) \\ -\{2\nu^2 a[p\mu\sin\varphi\cos\psi+q(1-\mu\cos\varphi)\cos\psi]-q(1-\mu^2)\nu a \\ \quad -2\mu\sin\varphi(1-\nu\cos\psi)+2(1-\mu\cos\varphi).\nu\sin\psi\}x^2 \\ -\{2\nu^2 a[p(1-\mu\cos\varphi)\sin\psi-q\mu\sin\varphi\sin\psi]-q(1-\mu^2)\nu a \\ \quad -2\mu\sin\varphi(1-\nu\cos\psi)+2(1-\mu\cos\varphi)\nu\sin\psi\}y^2 \\ +2\nu^2 a\{p[\cos\psi-\mu\cos(\varphi+\psi)]+q[\sin\psi-\mu\sin(\varphi+\psi)]\}xy \\ \quad +Mx+Ny=0. \end{cases}$$

Dabei bedeuten M und N gewisse Funktionen von p und q. Hat nun die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung die Form

$$(Ax+By)(x^2+y^2)+Cx^2+Dy^2+Exy+Fx+Gy+H=0,$$

so geht die Kurve durch die imaginären Kreispunkte und dann sind die Koordinaten des zugehörigen Centrums (d. h. des Schnittpunkts der Tangenten in den Kreispunkten) leicht zu ermitteln. Es schneidet nämlich ein beliebiger Kreis

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+P=0$$

die Kurve in den beiden Kreispunkten und in vier anderen Punkten, für welche die Gleichung gilt

$$(Ax+By)(2\alpha x+2\beta y-P)+Cx^2+Dy^2+Exy+Fx+Gy+H=0$$

oder

$$(2A\alpha+C)x^2+(2B\beta+D)y^2+(2A\beta+2B\alpha+E)xy+\ldots=0.$$

Ist demnach

$$\begin{cases} 2A\alpha+C=2B\beta+D \\ 2A\beta+2B\alpha+E=0, \end{cases}$$

so sind der Kreis und die Kurve dritter Ordnung konzentrisch, und es ergeben sich daher für die Koordinaten des Centrums der betrachteten Kurve die Werte

$$22)\qquad \alpha=-\frac{A(C-D)+BE}{2(A^2+B^2)},$$

$$23)\qquad \beta=\frac{B(C-D)-AE}{2(A^2+B^2)}.$$

Für die Kurve f_1 ist nun

$$A = Vp + Uq,$$
$$B = -(Up - Vq),$$
$$C - D = 2\nu^2 a\{p[\sin\psi - \mu\sin(\varphi+\psi)] - q[\cos\psi - \mu\cos(\varphi+\psi)]\},$$
$$E = 2\nu^2 a\{p[\cos\psi - \mu\cos(\varphi+\psi)] + q[\sin\psi - \mu\sin(\varphi+\psi)]\};$$

es gehen daher für f_1 die Gleichungen 22) und 23) über in

$$\alpha = -\frac{(p^2+q^2)\{V[\sin\psi - \mu\sin(\varphi+\psi)] - U[\cos\psi - \mu\cos(\varphi+\psi)]\}}{2(U^2+V^2)(p^2+q^2)} \cdot 2\nu^2 a$$
$$= \frac{U[\cos\psi - \mu\cos(\varphi+\psi)] - V[\sin\psi - \mu\sin(\varphi+\psi)]}{U^2+V^2}\nu^2 a$$
$$= \xi_\omega^{\text{II III}},$$
$$\beta = -\frac{U[\sin\psi - \mu\sin(\varphi+\psi)] + V[\cos\psi - \mu\cos(\varphi+\psi)]}{U^2+V^2}\nu^2 a$$
$$= \eta_\omega^{\text{II III}}.$$

Hieraus folgt der Satz, dass alle Kurven f_1, die den Geraden von Σ entsprechen, den Punkt $\Omega^{\text{II III}}$ zum Centrum haben.

11. Spezielle Geraden des Systems Σ. — In jedem der Systeme S_1 und Σ existieren gewisse Geraden, denen Kurven von spezieller Beschaffenheit konjugiert sind. Solche ausgezeichnete Geraden sollen nunmehr betrachtet werden.

Der Geraden π^{12} des Systems Σ entspricht in S_1 einerseits der Punkt P^{12}, andrerseits eine Kurve dritter Ordnung p_1^{12} als Durchschnitt zweier projektivischen Kreisbüschel $\mathfrak{a}^{\text{II}}\mathfrak{b}^{\text{II}}\ldots$ und $\mathfrak{a}^{\text{III}}\mathfrak{b}^{\text{III}}\ldots$, von denen das erste P^{12} und einen Punkt U, das zweite P^{12} und P^{31} zu Grundpunkten hat. (Fig. 6.) Es ist demnach jedem reellen Punkte A von π^{12} ausser dem Punkte P^{12} noch ein reeller Punkt A_1 zugeordnet. Die Verbindungslinien entsprechender Kreismittelpunkte $\overline{\mathsf{A}^{\text{II}}\mathsf{A}^{\text{III}}}$, $\overline{\mathsf{B}^{\text{II}}\mathsf{B}^{\text{III}}}\ldots$ bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung; dasselbe enthält zwei Strahlen $\overline{\Delta^{\text{II}}\Delta^{\text{III}}}$ und $\overline{\mathsf{E}^{\text{II}}\mathsf{E}^{\text{III}}}$, welche durch P^{12} gehen, und zu diesen Strahlen gehören auf π^{12} zwei Punkte Δ und E, deren jedem der Punkt P^{12} doppelt entspricht. Hieraus folgt, dass die Gerade π^{12} die Übergangskurve σ in Δ und E berührt, und dass die Kurve p_1^{12} in P^{12} einen Doppelpunkt hat.

Die Punkte Δ und E sind identisch mit den Schnittpunkten von π^{12} mit dem Kreise k_3. Beweis. Der Geraden π^{12} entspricht die Gleichung

$$2\xi - \nu a = 0.$$

Für $2\xi = \nu a$ verschwindet nun in der Gleichung 7) der Übergangskurve das zweite und dritte Glied, und es genügen daher die gemeinschaftlichen Punkte von π^{12} und σ der Gleichung

$$24) \quad \begin{cases} [\mu\nu \sin(\varphi-\psi) - \mu \sin\varphi + \nu \sin\psi]\,(\xi^2+\eta^2) \\ -\nu^2 a[\sin\psi + \mu \sin(\varphi-\psi)]\,\xi - \nu^2 a[\cos\psi - \mu\cos(\varphi-\psi)]\,\eta = 0. \end{cases}$$

Die Berührungspunkte von π^{12} und σ liegen demnach auf dem durch 24) dargestellten Kreise.

Bezeichnet man ferner mit $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Koordinaten dreier konjugierten Punkte $A_1 A_2 A_3$ der Systeme $S_1 S_2 S_3$, so liegen $A_1 A_2 A_3$ auf einer Geraden unter der Bedingung

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

Substituiert man hier für $x_2 y_2 x_3 y_3$ die in Art. 4 enthaltenen Werte, so ergiebt sich als Gleichung des Kreises k_1

$$25) \quad \begin{cases} [\mu\nu \sin(\varphi - \psi) - \mu \sin\varphi + \nu \sin\psi]\,(x_1^2 + y_1^2) \\ \quad + \mu\nu a \sin\varphi \,.\, x_1 - \nu a\,(1 - \mu\cos\varphi)\, y_1 = 0. \end{cases}$$

Um hieraus die Gleichung des Kreises k_3 zu erhalten, hat man zu setzen

$$\begin{aligned} \nu x_1 &= \quad x_3 \cos\psi + y_3 \sin\psi - \nu a \cos\psi, \\ \nu y_1 &= -x_3 \sin\psi + y_3 \cos\psi + \nu a \sin\psi. \end{aligned}$$

Gebraucht man dann noch an Stelle von x_3 und y_3 die Bezeichnungen ξ und η, so folgt als Gleichung von k_3

$$26) \quad \begin{cases} [\mu\nu \sin(\varphi - \psi) - \mu \sin\varphi + \nu \sin\psi]\,(\xi^2 + \eta^2) \\ - \nu a\,[\nu \sin\psi + \mu\nu \sin(\varphi - \psi) - 2\,\mu \sin\varphi]\,\xi \\ - \nu^2 a\,[\cos\psi - \mu\cos(\varphi - \psi)]\,\eta - \mu\nu^2 a^2 \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Aus 24) und 26) ergiebt sich endlich durch Subtraktion

$$2\,\mu\nu a \sin\varphi \,.\, \xi - \mu\nu^2 a^2 \sin\varphi = 0,$$

d. h.

$$2\xi - \nu a = 0.$$

Es gehen daher der Kreis 24), der Kreis k_3 und die Gerade π^{12} durch dieselben zwei Punkte, nämlich die Berührungspunkte von π^{12} und σ.

In Fig. 5 sind die Punkte Δ und E reell und P^{12} daher ein Knotenpunkt der Kurve p_1^{12}; die Kreise $\mathfrak{d}^{II}$ und $\mathfrak{e}^{II}$ bestimmen die Kurventangenten in P^{12}.

Den Geraden π^{23} und π^{31} entsprechen in S_1 einerseits resp. die Punkte P_1^{23} und P^{31}, andrerseits resp. die Kurven p_1^{23} und p_1^{31}. Da in der betrachteten Figur π^{23} den Kreis k_1 in zwei imaginären, π^{31} den Kreis k_2 in zwei reellen Punkten M und N schneidet, so ist P_1^{23} ein isolierter Punkt von p_1^{23}, P^{31} hingegen ein Knotenpunkt von p_1^{31}. Die Gerade π^{31} berührt die Übergangskurve in M und N, während π^{23} mit σ keinen reellen Punkt gemein hat.

Die Punkte $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ sind Doppelpunkte der Kurve s_1, und zwar hat in der betrachteten Figur s_1 in P^{12} und P^{31} einen Knotenpunkt, in P_1^{23} einen isolirten Punkt.

Der Geraden ζ, welche den Kreispunkt Z mit Ω verbindet, ist in S_1 nach Art. 5 einerseits der Punkt Z konjugiert, andrerseits entspricht ihr eine imaginäre Kurve dritter Ordnung z_1, die durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ geht und $\overline{Z\,\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\,\Omega^{II\,III}}$ zu Tangenten hat. Die Gerade ζ enthält zwei Punkte, deren jedem ein in Z zusammenfallendes Punktpaar entspricht, nämlich den Punkt Z und den Punkt, in welchem ζ die Übergangskurve berührt.* Demnach hat die Kurve z_1 in Z einen Doppelpunkt.

Analoges gilt für die Gerade $\zeta' \equiv \overline{Z'\,\Omega}$.

Man erkennt ferner, dass Z und Z' dreifache Punkte der Kurve s_1 sind. — Einer Geraden φ von Σ entspricht eine Kurve dritter Ordnung f_1, die mit s_1 18 Punkte gemein hat. Davon entfallen je zwei auf $P^{12}P_1^{23}P^{31}$, vier auf die Punkte, welche den Schnittpunkten von φ und σ entsprechen, und folglich je vier auf Z und Z'. Die Kurve f_1 berührt demnach in Z und in Z' den einen Zweig von s_1, d. h. s_1 hat in den imaginären Kreispunkten resp. die Geraden $\overline{Z\,\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\,\Omega^{II\,III}}$ einmal zu Tangenten.

12. Den drei Geraden $\overline{P^{12}P^{31}}$, $\overline{P^{12}P_1^{23}}$, $\overline{P_1^{23}P^{31}}$ des Systems S_1 sind in Σ keine eigentlichen Kurven dritter Ord-

* Die Übergangskurve hat in Z einen Doppelpunkt.

nung konjugiert. Da nämlich jedem der drei Punkte $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ in Σ bereits eine Gerade entspricht, so muss z. B. die Kurve dritter Ordnung, welche in Σ zu $P^{12}P^{31}$ konjugiert ist, in π^{12}, π^{31} und eine dritte Gerade zerfallen. Bezeichnet man die Geraden $\overline{P^{12}P^{31}}$, $P^{12}P_1^{23}$, $P_1^{23}P^{31}$ resp. mit $l_1^1 l_1^2 l_1^3$ und die Gerade, welche von π^{hi} und π^{ik} abgesehen in Σ zu l_1^i konjugiert ist, mit λ^i, so entspricht jedem Punkte von l_1^i ein Punkt von λ^i, und die entsprechenden Punktreihen auf l_1^i und λ^i sind einander ähnlich.

Zu l_1^1 ist die konjugierte Gerade λ^1 leicht zu ermitteln. (Fig. 7.) Da nämlich der Geraden $\overline{P^{12}P^{31}}$ in S_2 die Gerade $\overline{P^{12}P_2^{31}}$ und in S_3 die Gerade $\overline{P_3^{12}P^{31}}$ entspricht, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte von $\overline{P^{12}P^{31}}$ und $\overline{P^{12}P_2^{31}}$ parallel zu $\overline{P^{31}P_2^{31}}$ und die zugehörigen Normalhalbierenden $\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12}$. . parallel zu π^{31}. Ebenso sind die Normalhalbierenden $\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{b}_{31}$... parallel zu π^{12}, und λ^1 ist demnach das Erzeugnis der ähnlichen Parallelstrahlenbüschel $\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12}$... und $\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{b}_{31}$.... Dabei entspricht dem Punkte P^{12} im ersten Büschel eine Parallele durch P^{12} zu π^{31}, im zweiten die Gerade π^{12}, und dem Punkte P^{31} im ersten Büschel die Gerade π^{31}, im zweiten eine Parallele zu π^{12} durch P^{31}.

Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Geraden $\lambda^1\lambda^2\lambda^3$. Man zieht durch P^{12} Parallelen zu π^{23} und π^{31} bis zu ihrem Schnittpunkte q_{23}^{12} resp. q_{31}^{12} mit π^{12}, durch P^{23} Parallelen zu π^{31} und π^{12} bis zu ihrem Schnittpunkte q_{31}^{23} resp. q_{12}^{23} mit π^{23}, durch P^{31} Parallelen zu π^{12} und π^{23} bis zu ihrem Schnittpunkte q_{12}^{31} resp. q_{23}^{31} mit π^{31}. Dann geht λ^1 durch q_{31}^{12} und q_{12}^{31}, λ^2 durch q_{12}^{23} und q_{23}^{12}, λ^3 durch q_{23}^{31} und q_{31}^{23}.

In der so entstehenden Figur ist

$$\begin{cases} \overline{q_{31}^{12}q_{23}^{12}} = \overline{\Pi^1\Pi^2}, \\ \overline{q_{12}^{23}q_{31}^{23}} = \Pi^2\overline{\Pi^3}, \\ \overline{q_{23}^{31}q_{12}^{31}} = \overline{\Pi^3\Pi^1}, \end{cases}$$

weil $\overline{P^{12}\Pi^3} \parallel \pi^{12}$ u. s. w.

Die Dreiecke $\lambda^1\lambda^2\lambda^3$ und $l_1^1 l_1^2 l_1^3$ sind einander ähnlich, weil die Geraden $\lambda^1\lambda^2\lambda^3$ resp. nach den Punkten gehen, die den unendlich fernen Punkten von $l_1^1 l_1^2 l_1^3$ entsprechen. (Art. 6.)

13. Aus den in Art. 9 erhaltenen Resultaten ergiebt sich unmittelbar der Satz: Den drei Geraden $\lambda^1\lambda^2\lambda^3$ des Systems Σ entsprechen in S_1 einerseits resp. die Geraden $l_1^1 l_1^2 l_1^3$, andrerseits drei Kreise $l_1^{1'} l_1^{2'} l_1^{3'}$, die sämtlich $\Omega^{\text{II III}}$ zum Mittelpunkt haben und die resp. durch $P_1^{23} P^{31} P^{12}$ gehen. (Fig. 7.)

Dem Schnittpunkte Λ^h von λ^i und λ^k sind in S_1 zwei Punkte L_1^h und $L_1^{h'}$ zugeordnet; dabei liegt L_1^h auf der Geraden l_1^i und dem Kreise $l_1^{k'}$ und $L_1^{h'}$ auf der Geraden l_1^k und dem Kreise $l_1^{i'}$. Wie aus der Figur sofort folgt, ist

$$\begin{cases} \overline{P^{12} P_1^{23}} = \overline{L_1^{3'} L_1^1}, \\ \overline{P_1^{23} P^{31}} = \overline{L_1^{1'} L_1^2}, \\ \overline{P^{31} P^{12}} = \overline{L_1^{2'} L_1^3}. \end{cases}$$

Den vier Punkten $P^{12} P^{31} L_1^3 L_1^{2'}$ von l_1^1 entsprechen auf λ^1 resp. die Punkte $q_{31}^{12} q_{12}^{31} \Lambda^3 \Lambda^2$. Konjugierte Punktreihen von l_1^1 und λ^1 sind einander ähnlich, folglich erhält man mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen

$$\begin{cases} \overline{\Lambda^2 \Lambda^3} = \overline{q_{12}^{31} q_{31}^{12}}, \\ \overline{\Lambda^3 \Lambda^1} = \overline{q_{23}^{12} q_{12}^{23}}, \\ \overline{\Lambda^1 \Lambda^2} = \overline{q_{31}^{23} q_{23}^{31}}. \end{cases} \quad \text{und ebenso}$$

Da die Dreiecke $\Pi^1\Pi^2\Pi^3$ und $\Lambda^1\Lambda^2\Lambda^3$ einander ähnlich sind, so liegen die vier Punkte $\Pi^1\Lambda^1 q_{23}^{31} q_{23}^{12}$ auf der Peripherie eines Kreises χ^1; ferner liegen $\Pi^2\Lambda^2 q_{31}^{23} q_{31}^{12}$ auf einem Kreise χ^2 und $\Pi^3\Lambda^3 q_{12}^{31} q_{12}^{23}$ auf einem Kreise χ^3. Hierbei ist das Centrum von χ^1 der Schnittpunkt der Normalhalbierenden von $\overline{\Pi^1 q_{23}^{12}}$ und $\overline{\Lambda^1 q_{23}^{31}}$, das Centrum von χ^2 der Schnittpunkt der Normalhalbierenden von $\overline{\Pi^2 q_{31}^{12}}$ und $\overline{\Lambda^2 q_{31}^{23}}$. Nach den zuletzt abgeleiteten Gleichungen fallen aber diese Normalhalbierenden zu je zwei zusammen, mithin sind χ^1 und χ^2 konzentrisch. Dasselbe gilt von χ^1 und χ^3. Daher der Satz: Die Punkte $\Pi^1\Lambda^1 q_{23}^{31} q_{23}^{12}$, $\Pi^2\Lambda^2 q_{31}^{23} q_{31}^{12}$, $\Pi^3\Lambda^3 q_{12}^{31} q_{12}^{23}$ liegen in der angegebenen Reihenfolge zu je vier auf drei konzentrischen Kreisen $\chi^1\chi^2\chi^3$.

Nach einer früher gemachten Bemerkung (Art. 9) schneiden sich die Geraden $L_1^2 L_1^{2'}$ und $L_1^3 L_1^{3'}$ in einem Punkte H^1 des

Kreises $l_1^{1'}$; durch H^1 gehen dann die Verbindungslinien aller Punktpaare, die den Punkten von λ^1 entsprechen. Ebenso bestimmen $L_1^3 L_1^{3'}$ und $L_1^1 L_1^{1'}$ auf $l_1^{2'}$ einen Punkt H^2, ferner $L_1^{1'} L_1^{1'}$ und $L_1^2 L_1^{2'}$ auf $l_1^{3'}$ einen Punkt H^3. Die Dreiecke $H^1H^2H^3$ und $P_1^{23}P^{31}P^{12}$ sind einander ähnlich.

Die reellen oder imaginären Schnittpunkte der Geraden $l_1^{\prime}$ und des Kreises $l_1^{\prime}$ sind selbstentsprechende Punkte der Systeme S_1 und S'_1 und liegen daher auf der Kurve s_1. Ihnen entsprechen in Σ zwei Punkte, in denen λ' die Übergangskurve berührt. Die Geraden $\lambda^1\lambda^2\lambda^3$ sind Doppeltangenten der Übergangskurve.

Die von den vier ähnlichen Dreiecken $P_1^{23}P^{31}P^{12}$, $H^1H^2H^3$, $\Lambda^1\Lambda^2\Lambda^3$, $\Pi^1\Pi^2\Pi^3$ und dem Punkte P^{23} gebildete Figur bietet noch eine Fülle bemerkenswerter Beziehungen; so ist z. B.

$$P^{12}\Lambda^3 \quad \lambda^3,$$
$$P^{23}\Lambda^1 \parallel \lambda^1,$$
$$P^{31}\Lambda^2 \parallel \lambda^2.$$

14. Abbildung der Geraden von S_1, welche einen der Punkte $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ enthalten. — Einer Geraden g_1, die durch P^{12} geht, ist in Σ nicht eine eigentliche Kurve dritter Ordnung konjugiert, sondern die Gerade π^{12} für den Punkt P^{12} und überdies ein Kegelschnitt γ, der die Übergangskurve vier mal berührt. (Fig. 8.) Bedeutet $A_1B_1\ldots$ eine Punktreihe auf g_1, X_1 den zweiten Schnittpunkt von g_1 mit dem Kreise k_1, so ergiebt sich γ als Durchschnitt eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung $\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{b}_{31}\ldots$ mit einem dazu projektivischen Parallelstrahlenbüschel $\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12}\ldots$, dessen Strahlen zu $T^{\overline{123}}X_1$ normal sind. Dabei liegt auf dem Strahle $\mathfrak{x}_{12}$ ein unendlich ferner Punkt, aber kein endlicher Punkt von γ, folglich ist $\mathfrak{x}_{12}$ eine Asymptote von γ und γ demnach eine Hyperbel.

Die Asymptote $\mathfrak{x}_{12}$ geht für alle Hyperbeln, die den Strahlen des Büschels P^{12} entsprechen, durch den festen Punkt Π^3 (Art. 7); es kommt noch darauf an, die Lage der zweiten Asymptote $\mathfrak{y}$ von γ zu bestimmen.

Zieht man durch P^{12} eine Parallele zu $\mathfrak{x}_{12}$, welche π^{12} in Φ trifft, so ist Φ ein Punkt von γ. Die Hyperbel γ hat mit

π^{12} noch einen Punkt Ψ gemein; derselbe entspricht in Σ dem Punkte, in welchem g_1 die Kurve p_1^{12} nochmals schneidet. Dreht sich nun die Gerade g_1 um P^{12}, so dass sie mit jedem Strahle des Büschels P^{12} einmal zusammenfällt, so geht sie bei dieser Drehung durch jeden Punkt der Kurve p_1^{12} (vom Doppelpunkte P^{12} abgesehen) einmal hindurch, und gleichzeitig durchlaufen dann die Punkte Φ und Ψ einmal sämtliche Punkte von π^{12}. Die Hyperbeln γ, welche den Strahlen des Büschels P^{12} entsprechen, bestimmen demnach auf π^{12} zwei Punktreihen $\Phi\ldots$ und $\Psi\ldots$, die beide dem Strahlenbüschel P^{12} projektivisch sind. Bezeichnet man ferner mit Ξ und H resp. die Schnittpunkte der beiden Asymptoten $\mathfrak{x}_{12}$ und $\mathfrak{y}$ mit π^{12}, so ist bekanntlich $\overline{\Phi\,\Xi} = \overline{\Psi\,\mathsf{H}}$. Aus dem Parallelogramm $\Phi\,\Xi\,\Pi^3 P^{12}$ ergiebt sich aber, dass $\overline{\Phi\,\Xi} = \overline{P^{12}\,\Pi^3}$ ist, folglich sind die Punktreihen $\Psi\ldots$ und $\mathsf{H}\ldots$ kongruent, und demnach ist auch die Punktreihe $\mathsf{H}\ldots$ projektivisch dem Strahlenbüschel P^{12}.

Die Asymptote $\mathfrak{y}$ wird nun für jede der betrachteten Hyperbeln γ gefunden, indem man durch den betreffenden Punkt H eine Gerade zieht, die mit der zugehörigen Geraden g_1 den constanten Winkel ι einschliesst. (Art. 6.) Die Geraden $\mathfrak{y}$ umhüllen demnach eine Parabel, wenn eine derselben mit π^{12} zusammenfällt, andernfalls bilden sie ein Strahlenbüschel erster Ordnung. Nun hat aber jede der Hyperbeln γ mit π^{12} mindestens einen endlichen Punkt gemein, mithin kann π^{12} nicht zu den Asymptoten $\mathfrak{y}$ gehören, und daher schneiden sich dieselben alle in einem Punkte. Dieser Punkt ist identisch mit Λ^3, weil für die Geraden l_1^1 und l_1^2 die Hyperbeln γ resp. in die Geradenpaare $\lambda^1\pi^{31}$ und $\lambda^2\pi^{23}$ degenerieren.

Die beiden Asymptotenbüschel Π^3 und Λ^3 sind dem Strahlenbüschel P^{12} kongruent und erzeugen daher einen Kreis, der durch die Schnittpunkte konjugierter Asymptoten, also durch $\lambda^1\cdot\pi^{31}$ und $\lambda^2\cdot\pi^{23}$ geht. Dieser Kreis ist identisch mit χ^3. Daher der Satz: Allen Geraden des Systems S_1, die durch P^{12} gehen, ist in Σ einerseits die Gerade π^{12} zugeordnet. Andererseits entsprechen ihnen im allgemeinen Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf dem Kreise χ^3 liegen und deren Asymptoten resp. durch

Π^3 und Λ^3 gehen. Der Asymptotenwinkel ist demnach constant.

Analoge Sätze gelten in Bezug auf die Geraden, die durch P^{31} oder durch P_1^{23} gezogen sind.

Um zu einer Geraden g_1, die durch P^{12} geht, die konjugierte Hyperbel γ zu konstruieren, ziehe man durch Π^3 eine Gerade $\mathfrak{x}_{12}$ normal zu $T^{123}X_1$ und $\overline{P^{12}\Phi}$ in derselben Richtung. Durch $\mathfrak{x}_{12}$ und χ^3 ist auch die zweite Asymptote $\mathfrak{y}$ gegeben und durch $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{y}$, Φ ist γ bestimmt.

---

15. Nachdem für die Geraden der beiden Systeme S_1 und Σ die zugehörigen Abbildungen bestimmt sind, gehen wir dazu über, eine Reihe von allgemeinen Beziehungen zwischen konjugierten Kurven zu entwickeln. Transcendente Kurven bleiben bei den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

Bezeichnet a_1 eine Kurve von S_1, die den Systemen S_1 und S'_1 nicht selbstentsprechend angehört, und α die in Σ konjugierte Kurve, so wird derselben eine zweite Kurve a'_1 zugeordnet sein. Dann sind a_1, a'_1, α eindeutig auf einander bezogen und folglich von gleichem Geschlecht. Diese Unveränderlichkeit des Geschlechts braucht nicht mehr zu bestehen, wenn a'_1 mit a_1 zusammenfällt, also a_1 eine selbstentsprechende Kurve von S_1 und S'_1 ist.

Da jedem reellen Punkte von a_1 ein Punkt im Gebiete Σ' oder auf σ entspricht, so ist jedem Schnittpunkte von a_1 und s_1 ein Berührungspunkt der Kurven α und σ oder ein auf σ gelegener Rückkehrpunkt von α zugeordnet. Es fragt sich, unter welchen Umständen an Stelle des Berührungspunktes von α und σ ein Rückkehrpunkt von α auftritt. — Wenn a_1 keine selbstentsprechende Kurve von S_1 und S'_1 ist, so giebt es auf a_1 eine beschränkte Anzahl von Punktpaaren $A_1A'_1$, $B_1B'_1\ldots$, denen in Σ jedesmal ein einziger Punkt AB... entspricht. Dann sind AB... Doppelpunkte von α, und zwar hat α in A einen Knotenpunkt, oder einen Rückkehrpunkt, oder einen isolierten Punkt, je nachdem das Punktpaar $A_1A'_1$ reell und getrennt, oder zusammenfallend, oder imaginär ist. Ein zusammenfallendes Punktpaar $A_1A'_1$ entspricht aber immer

einem Punkte A der Übergangskurve; dasselbe wird fixiert durch die gemeinschaftliche Tangente der sich berührenden Kreise $\mathfrak{a}^{II}$ und $\mathfrak{a}^{III}$.*

Soll demnach die Kurve α in A auf σ statt des Berührungspunktes einen Rückkehrpunkt haben, so muss a_1 den Kreis $\mathfrak{a}^{II}$ in A_1 berühren. — Hieraus ergiebt sich der Satz: Den Kurven des Systems S_1, welche durch den Punkt A_1 auf s_1 gehen, entsprechen in Σ im allgemeinen Kurven, welche in A die Übergangskurve berühren. Berührt aber eine Kurve a_1 in A_1 den Kreis $\mathfrak{a}^{II}$, so hat die konjugierte Kurve α in A einen Rückkehrpunkt, ohne im allgemeinen σ in A zu berühren.

Dem soeben erhaltenen Resultate kann der folgende leicht zu beweisende Satz gegenübergestellt werden: Den Kurven des Systems Σ, welche durch denselben Punkt B auf σ gehen, entsprechen in S_1 im allgemeinen Kurven, welche in B_1 den Kreis $\mathfrak{b}^{II}$ berühren. Berührt aber eine Kurve β in B die Übergangskurve, so hat die konjugierte Kurve b_1 in B_1 einen Doppelpunkt, ohne im allgemeinen den Kreis $\mathfrak{b}^{II}$ zu berühren.*

16. Bezeichnet β eine Kurve ν^{ter} Ordnung des Systems Σ, b_1 die in S_1 konjugierte Kurve, so ist b_1 von der $3\nu^{ten}$ Ordnung. Denn einer Geraden g_1 von S_1 entspricht in Σ eine Kurve dritter Ordnung γ, die mit β 3ν Punkte gemein hat. Diesen 3ν Punkten sind in S_1 6ν Punkte von b_1 konjugiert, von denen aber nur 3ν auf g_1 liegen.**

Jedem der Punkte, in denen β eine der Geraden $\pi^{12}\pi^{23}\pi^{31}\xi\xi'$ schneidet, entspricht in S_1 ein einmaliges Hindurchgehen der Kurve b_1 resp. durch den Punkt $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$. Die konjugierte Kurve b_1 hat daher in $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ und in jedem der imaginären Kreispunkte einen ν-fachen Punkt. — Einer Geraden φ von Σ entspricht ferner in S_1 eine Kurve dritter Ordnung f_1, die mit b_1 9ν Punkte gemein hat. Von diesen sind 2ν den ν Schnittpunkten von β und φ konjugiert;

---

* Die Kurve s_1 berührt in A_1 den Kreis $\mathfrak{a}^{II}$ im allgemeinen nicht.

** Diese Schlussweise ist unstatthaft, wenn man unter β die Übergangskurve versteht.

die übrigen 7ν entfallen auf die fünf ν-fachen Punkte von b_1. Wir schliessen hieraus, dass f_1 die Kurve b_1 in Z und Z' je ν mal berührt, d. h. die Kurve b_1 hat die beiden Geraden $Z\,\Omega^{II\,III}$ und $Z'\,\Omega^{II\,III}$ zu ν-fachen Asymptoten. Jeder der imaginären Kreispunkte zählt daher für zwei ν-fache Punkte oder für $\nu\,(\nu-1)$ Doppelpunkte von b_1. — Der Satz, dass b_1 durch jeden der imaginären Kreispunkte ν mal hindurchgeht und in denselben resp. die Geraden $\overline{Z\,\Omega^{II\,III}}$ und $Z'\,\Omega^{II\,\overline{III}}$ ν mal zu Tangenten hat, bedarf übrigens einer Modifikation, sobald die Kurve β selbst die imaginären Kreispunkte enthält. Jeder derartige Fall macht eine besondere Untersuchung nötig,* aber stets bleibt die Thatsache ungeändert, dass b_1 in Z und Z' resp. mit den Geraden $\overline{Z\,\Omega^{II\,III}}$ und $Z'\,\Omega^{II\,\overline{III}}$ 2ν zusammenfallende Punkte gemein hat.

Jedem x-fachen Punkte von β entsprechen zwei x-fache Punkte von b_1; jedem Berührungspunkte zwischen β und σ ist ein Doppelpunkt von b_1 konjugiert. Bezeichnet man mit δ und ϱ resp. die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte von β, mit d und r die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte von b_1, und mit ψ die Anzahl der Berührungen von β und σ, so ist für den Fall, dass β nicht durch Z und Z' geht,

$$d + r = 2\,(\delta + \varrho) + \tfrac{7}{2}\,\nu\,(\nu - 1) + \psi.$$

Wie viele von diesen $d+r$ Punkten zu den Doppelpunkten und wie viele zu den Rückkehrpunkten der Kurve b_1 zu zählen sind, ist durch die Charaktere $\delta\varrho\nu$ und die Zahl ψ allein nicht ausdrückbar. Ist z. B. β ein Kegelschnitt, so hat b_1 in P^{12} einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt, je nachdem β die Gerade π^{12} in zwei getrennten Punkten schneidet oder berührt.

Setzt man $\delta + \varrho = \frac{1}{2}\,(\nu-1)\,(\nu-2)$ und $\psi = 2\nu$, so folgt

$$d + r = \tfrac{9}{2}\,\nu^2 - \tfrac{9}{2}\,\nu + 2 = \tfrac{1}{2}\,(3\nu - 1)\,(3\nu - 2) + 1,$$

d. h. $d+r$ wird um 1 grösser als die Maximalzahl der Doppelpunkte einer eigentlichen Kurve $3\nu^{ter}$ Ordnung. Daher der Satz: Jeder Unikursalkurve, welche die Übergangskurve nur berührt, entspricht in S_1 keine eigentliche Kurve $3\nu^{ter}$ Ordnung. Versteht man z. B. unter β eine Kurve

* Ein Beispiel dieser Art bietet Art. 20, pag. 41.

dritter Ordnung, welche der Geraden g_1 von S_1 zugeordnet ist, so zerfällt die konjugierte Kurve b_1 in die Gerade g_1 und eine Kurve achter Ordnung g'_1. Von den 29 Doppelpunkten von b_1 kommen dann 21 auf $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$, 8 auf die Schnittpunkte von g_1 und g'_1. In dem besonderen Falle, dass β auf σ einen Rückkehrpunkt hat und im übrigen die Kurve σ fünf mal berührt, vereinigen sich drei von den acht eigentlichen Doppelpunkten der Kurve b_1. Es entspricht nämlich dem Rückkehrpunkte von β ein Wendepunkt von g'_1, der g_1 zur Wendetangente hat.

17. Es sei ferner a_1 eine Kurve m^{ter} Ordnung, die den Systemen S_1 und S'_1 nicht selbstentsprechend angehört, α die in Σ konjugierte Kurve. Wir setzen voraus, die Kurve a_1 gehe durch die Punkte $P_1^{23}P^{31}P^{12}ZZ'$ resp. $u_1u_2u_3u_4u_5$ mal hindurch und sie habe in Z und Z' resp. die Geraden $Z\Omega^{\text{II III}}$ und $Z'\bar{\Omega}^{\text{II III}}$ u_6 und u_7 mal zu Tangenten. Es bezeichne ferner d die Anzahl der Doppelpunkte, r die Anzahl der Rückkehrpunkte, welche a_1 ausser jenen fünf singulären Punkten noch besitzt und von denen vorläufig angenommen wird, dass keiner von ihnen auf s_1 liegt, endlich h die Anzahl derjenigen Punkte $A_1B_1\ldots$, in denen a_1 die Kurve s_1 so schneidet, dass sie die zugehörigen Kreise $\mathfrak{a}^{\text{II}}\mathfrak{b}^{\text{II}}\ldots$ und $\mathfrak{a}^{\text{III}}\mathfrak{b}^{\text{III}}\ldots$ berührt. Es soll zunächst die Ordnung μ von α bestimmt werden.

Zieht man in Σ eine Gerade φ, so entspricht derselben in S_1 eine Kurve dritter Ordnung f_1, welche mit a_1 $3m$ Punkte gemein hat. Davon entfallen im allgemeinen Σu_i auf die Punkte $P_1^{23}P^{31}P^{12}ZZ'$, denen jedesmal resp. die Geraden $\pi^{23}\pi^{31}\pi^{12}\xi\xi'$ entsprechen; die übrigen $3m - \Sigma u_i$ sind den Schnittpunkten von φ und α zugeordnet. Der Kurve a_1 entspricht daher in Σ ausser den Geraden $\pi^{23}\pi^{31}\pi^{12}\xi\xi'$ eine Kurve α von der Ordnung

$$\mu = 3m - \Sigma u_i.$$

Dieselbe hat mit σ $6m - 2\Sigma u_i - h$ Berührungspunkte* und h Rückkehrpunkte gemein.

---

* Dabei ist auch jeder Durchgang der Kurve α durch Z oder Z' als eine Berührung zu zählen.

Konstruiert man zu α die in S_1 konjugierte Kurve, so ergiebt sich als vollständiges Bild von α nach Art. 16 eine uneigentliche Kurve von der Ordnung $9m - 3\Sigma u_i$, welche in a_1 und eine zweite Kurve a'_1 zerfällt. Der Kurve a_1 entspricht also in S'_1 eine Kurve a'_1 von der Ordnung $8m - 3\Sigma u_i$. Dieselbe enthält den Punkt P_1^{23} $3m - \Sigma u_i - u_1$ mal, u. s. w.

Die Kurven a_1 und a'_1 haben $m(8m - 3\Sigma u_i)$ Punkte mit einander gemein; davon kommen

$$u_1(3m - \Sigma u_i - u_1) + u_2(3m - \Sigma u_i - u_2) + \ldots$$
$$= 3m\,\Sigma u_i - (\Sigma u_i)^2 - \Sigma u_i^2$$

auf $P_1^{23} P^{31} P^{12} Z Z'$. Von diesen fünf Punkten abgesehen ist also die Anzahl der Schnittpunkte von a_1 und a'_1 gleich $8m^2 - 6m\Sigma u_i + (\Sigma u_i)^2 + \Sigma u_i^2$.

Von denselben liegen im allgemeinen $6m - 2\Sigma u_i$ auf der Kurve s_1, die übrigen bilden

$$4m^2 - 3m + \Sigma u_i - 3m\,\Sigma u_i + \tfrac{1}{2}[(\Sigma u_i)^2 + \Sigma u_i^2]$$

Punktpaare, denen Doppel- oder Rückkehrpunkte von α zugeordnet sind. Da sich unter diesen Punktpaaren h zusammenfallende befinden sollen, so ergeben sich hierdurch h Rückkehrpunkte und

$$4m^2 - 3m + \Sigma u_i - 3m\,\Sigma u_i + \tfrac{1}{2}[(\Sigma u_i)^2 + \Sigma u_i^2] - h$$

Doppelpunkte von α. Da ferner den d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten von a_1 die gleiche Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten von α zugeordnet ist, so folgt, wenn δ die Anzahl der Doppelpunkte, ϱ die der Rückkehrpunkte von α bezeichnet,

$$\delta = d + 4m^2 - 3m + \Sigma u_i - 3m\,\Sigma u_i + \tfrac{1}{2}[(\Sigma u_i)^2 + \Sigma u_i^2] - h$$
$$\varrho = r + h.$$

Der soeben erhaltene Wert von δ kann auch aus den für μ und ϱ gefundenen Ausdrücken abgeleitet werden, wenn man bedenkt, dass die Kurven a_1 und α gleiches Geschlecht besitzen.

Bedeutet $\varkappa$ die Klasse von α, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die für μ, δ, ϱ erhaltenen Werte

$$\varkappa = m(m+3) - 2d - 3r - \Sigma u_i(u_i + 1) - h.$$

Die Klasse der Kurve α kann in folgender Weise auch direkt bestimmt werden. Einem Strahlenbüschel von Σ entspricht in S_1 ein Büschel von Kurven dritter Ordnung, welche durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ und durch zwei andere feste Punkte gehen und in Z und Z' resp. die Geraden $Z\Omega^{II\,III}$ und $\overline{Z'}\Omega^{II\,III}$ zu Tangenten haben. In diesem Büschel giebt es bekanntlich $m(m+3)-2d-3r-\Sigma u_i(u_i+1)$ Kurven, welche a_1 berühren, und unter denselben befinden sich h, bei denen die Berührung in Punkten von s_1 stattfindet. Den h zuletzt genannten Kurven entsprechen in Σ Strahlen, die jeder durch einen Rückkehrpunkt von α gehen, ohne im allgemeinen Tangenten von α zu sein; den übrigen $m(m+3)-2d-3r-\Sigma u_i(u_i+1)-h$ sind in Σ die sämtlichen Tangenten von α zugeordnet, welche dem betrachteten Strahlenbüschel angehören.

Die zuletzt abgeleiteten Formeln zeigen, dass die Charaktere der Kurve α nicht allein von den entsprechenden Charakteren der Kurve a_1, sondern auch von der Lage dieser Kurve abhängen. — In dem besonderen Falle, dass vielfache Punkte von a_1 auf s_1 liegen,* bedürfen die für $\delta\varrho\varkappa$ erhaltenen Gleichungen einer Korrektur. Denn hat die Kurve a_1 auf s_1 z. B. einen Knotenpunkt, so entspricht demselben auf σ im allgemeinen ein Berührungsknoten von α, der für zwei Doppelpunkte zu zählen ist.

Mit Rücksicht auf die Ergebnisse dieses und des vorigen Artikels kann die betrachtete Verwandtschaft der Systeme S_1 und Σ als eine ein-zweideutige Verwandtschaft dritten Grades bezeichnet werden. Es befinden sich ferner die involutorischen Systeme S_1 und S'_1 in einer rationalen Verwandtschaft achten Grades.

18. Die im vorigen Artikel abgeleiteten Beziehungen zwischen konjugierten Kurven galten nur unter der Voraussetzung, dass die dort betrachtete Kurve a_1 den Systemen S_1 und S'_1 nicht selbstentsprechend angehörte. Es erscheint deshalb angemessen, Kriterien dafür aufzusuchen, dass eine im System S_1 willkürlich angenommene Kurve a_1 eine

* Von $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ abgesehen.

selbstentsprechende Kurve von S_1 und S'_1 ist oder nicht.

Die Kurve a_1 kann nach Art. 16 eine selbstentsprechende Kurve von S_1 und S'_1 sein, wenn ihre Ordnungszahl von der Form $3n$ ist und wenn sie $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ zu n-fachen Punkten und die Geraden $\overline{Z\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\Omega^{II\,III}}$ zu n-fachen Tangenten hat.* Ist die so beschaffene Kurve nicht sich selbst konjugiert, so entspricht ihr nach Art. 17 in S'_1 eine Kurve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung a'_1 mit denselben Singularitäten in $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$. Die Kurven a_1 und a'_1 haben $9n^2$, und von jenen fünf singulären Punkten abgesehen, $2n^2$ Punkte mit einander gemein. Von den letzteren liegen $6\,.\,3n - 7\,.\,2n = 4n$ auf s_1, also giebt es auf a_1 nur $n^2 - 2n$ Paare von im allgemeinen getrennten Punkten, die einander in S_1 und S'_1 entsprechen. Die Kurve a_1 ist daher eine selbstentsprechende Kurve der Systeme S_1 und S'_1, wenn sie mehr als $n^2 - 2n$ solcher konjugierten Punktpaare enthält. — Hieraus folgt z. B.: Jede Kurve dritter Ordnung, welche durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ geht und in Z und Z' resp. die Geraden $\overline{Z\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\Omega^{II\,III}}$ berührt, ist eine selbstentsprechende Kurve von S_1 und S'_1. Jede Kurve sechster Ordnung, die $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ zu Doppelpunkten hat und in Z und Z' resp. die Geraden $\overline{Z\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\Omega^{II\,III}}$ zweimal berührt, ist dann selbstentsprechend, wenn sie überhaupt **ein** konjugiertes Punktpaar besitzt. — Einzelne konjugierte Punktpaare sind leicht zu erhalten, z. B. dadurch, dass man in Fig. 7 die Gerade l_1^1 von H^1 aus auf den Kreis $l_1^{1'}$ projiciert. Schneidet also eine Kurve a_1 den Kreis $l_1^{1'}$ und die Gerade l_1^1 nicht in Punktpaaren, deren Verbindungslinien durch H^1 gehen, so kann a_1 nicht eine selbstentsprechende Kurve sein.

Da das System $\Sigma \infty^{\frac{n}{2}(n+3)}$ Kurven n^{ter} Ordnung enthält, so giebt es in S_1 ebenso viele Kurven $3n^{\text{ter}}$ Ordnung, die

* Als notwendige Bedingung dafür, dass a_1 den Systemen S_1 und S'_1 selbstentsprechend angehört, ergiebt sich die, dass die Ordnung von a_1 von der Form $3n$ ist, dass $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ n-fache Punkte von a_1 sind und dass $\overline{Z\Omega^{II\,III}}$ und $\overline{Z'\Omega^{II\,III}}$ in Z resp. Z' $2n$ Punkte mit a_1 gemein haben.

den Systemen S_1 und S'_1 selbstentsprechend angehören. Jede dieser Kurven hat fünf feste Punkte zu n-fachen Punkten, zwei feste Gerade zu n-fachen Tangenten;* sie schneidet ferner die Kurve s_1 $4n$ mal in bestimmten Richtungen, welche durch die zugehörigen Kreise $\mathfrak{a}^{II}\mathfrak{b}^{II}$... fixiert sind — vorausgesetzt, dass sich unter diesen Schnittpunkten keine Doppelpunkte befinden. Schreibt man nun einer Kurve $3n^{ter}$ Ordnung die Punkte $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ als n-fache Punkte, die Geraden $\overline{Z\Omega^{III III}}$ und $\overline{Z'\Omega^{III III}}$ als n-fache Tangenten vor und verlangt man ferner, dass sie die Kurve s_1 $4n$ mal in den durch die Kreise $\mathfrak{a}^{II}\mathfrak{b}^{II}$... bestimmten Richtungen schneidet, so unterwirft man die Kurve im allgemeinen $\frac{7}{2}n(n+1)+4n$ von einander unabhängigen Bedingungen,** es giebt also

$$\infty^{\frac{1}{2}3n(3n+3)-\frac{7}{2}n(n+1)-4n} = \infty^{n^2-3n}$$

Kurven, welche den gestellten Forderungen genügen. Wird dann die Zahl n so gewählt, dass

$$n^2-3n \leqq \frac{n}{2}(n+3)$$

ist, d. h. nimmt man $n \leqq 9$, so gehören alle diese Kurven zu den selbstentsprechenden Kurven $3n^{ter}$ Ordnung der Systeme S_1 und S'_1. Daher der Satz: Wenn eine Kurve $3n^{ter}$ Ordnung, welche $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$ zu n-fachen Punkten und in Z resp. Z' die Geraden $\overline{Z\Omega^{III III}}$ und $\overline{Z'\Omega^{III III}}$ zu n-fachen Tangenten hat, die Kurve s_1, von den fünf genannten Punkten abgesehen, nur in der Richtung der zu den Schnittpunkten gehörigen Kreise $\mathfrak{a}^{II}\mathfrak{b}^{II}$... schneidet, so ist sie notwendig eine selbstentsprechende Kurve der Systeme S_1 und S'_1, sobald $n \leqq 9$ ist.

---

19. Wir gehen dazu über, die in den vorigen Artikeln abgeleiteten allgemeinen Sätze auf einige spezielle Fälle anzuwenden.

---

* oder doch mit jeder der festen Geraden $2n$ zusammenfallende Punkte gemein.

** Ist $n < 9$, so sind die genannten Bedingungen nicht unabhängig von einander.

Es giebt in S_1 zwölf Geraden, denen in Σ gerade Linien konjugiert sind, nämlich die Geraden $\overline{Z\Omega^{\text{III III}}}$ und $\overline{Z'\Omega^{\text{III III}}}$ und die zehn Verbindungslinien der Punkte $P^{12}P_1^{23}P^{31}ZZ'$.

Den Geraden $\overline{Z\Omega^{\text{III III}}}$ und $\overline{Z'\Omega^{\text{III III}}}$ entsprechen in Σ zwei imaginäre Geraden, welche Doppeltangenten der Übergangskurve sind. Dieselben schneiden sich in einem reellen Punkte, der in Σ dem Punkte $\Omega^{\text{III III}}$ zugeordnet ist.

Als bicirkulare Kurve vierter Ordnung besitzt σ acht eigentliche Doppeltangenten. Sechs derselben sind nach dem Vorhergehenden reell und identisch mit den Geraden $\pi^{12}\pi^{23}\pi^{31}\lambda^1\lambda^2\lambda^3$.

Der Geraden $\overline{Z\Omega^{\text{III III}}}$ entspricht in S_1 andererseits ein imaginärer Kegelschnitt, der durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}Z'$ geht und $\overline{Z'\Omega^{\text{III III}}}$ zur Tangente hat.

Der Geraden $\overline{ZP^{12}}$ ist in Σ eine Gerade zugeordnet, welche ebenfalls durch Z geht; denn da $\overline{ZP^{12}}$ mit der unendlich fernen Geraden und dem Kreise k_1 nur die Punkte Z und P^{12} gemein hat, so fällt der unendlich ferne Punkt der konjugierten Geraden mit Z zusammen. Auf $\overline{ZP^{12}}$ liegt ferner einer von den Punkten I und K, die nach Art. 5 selbstentsprechende Punkte von S_1 und Σ sind. Daraus folgt, dass zu $\overline{ZP^{12}}$ in Σ dieselbe Gerade konjugiert ist. Analoge Schlüsse gelten für die Geraden $\overline{Z'P^{12}}$, $\overline{ZP^{31}}$, $\overline{Z'P^{31}}$. Daher der Satz: Die Systeme S_1 und Σ haben ausser der unendlich fernen Geraden noch die vier Geraden entsprechend gemein, welche jeden der imaginären Kreispunkte mit P^{12} und P^{31} verbinden.

Fasst man $\overline{ZP^{12}}$ auf als gehörig zu Σ, so entspricht ihr andererseits ein imaginärer Kreis durch P_1^{23} und P^{31} mit der Tangente $\overline{Z'\Omega^{\text{III III}}}$.

Die beiden Punkte, welche in S_1 dem Punkte P^{23} entsprechen, sind die imaginären Grundpunkte desjenigen Kreisbüschels, welches P^{23} und P_1^{23} zu Grenzpunkten hat; jeder von ihnen liegt also auf einer der Geraden $\overline{ZP_1^{23}}$ und $\overline{Z'P_1^{23}}$. Daraus folgt, dass den Geraden $\overline{ZP_1^{23}}$ und $\overline{Z'P_1^{23}}$ in Σ

resp. die Geraden ZP^{23} und $Z'P^{23}$ konjugiert sind. Zu $\overline{ZP^{23}}$ ergiebt sich in S_1 andrerseits ein imaginärer Kreis durch P^{12} und P^{31} mit der Tangente $\overline{Z'\Omega^{\text{III III}}}$.

Aus jedem der imaginären Kreispunkte gehen an die Übergangskurve vier imaginäre Tangenten. Dieselben sind nach den zuletzt erhaltenen Resultaten einerseits identisch mit den Geraden $\overline{ZP^{12}}$, $\overline{ZP^{31}}$, $\overline{ZP^{23}}$, ξ, andrerseits mit $\overline{Z'P^{12}}$, $\overline{Z'P^{31}}$, $\overline{Z'P^{23}}$, ξ'. Die genannten Geraden bestimmen die sechzehn Brennpunkte von σ. Die Punkte $P^{12}P^{23}P^{31}\Omega$ sind daher die vier reellen Brennpunkte der Übergangskurve, und da dieselben nach Art. 3 auf dem Kreise ϑ liegen, so gehört σ zu denjenigen bicirkularen Kurven dritter Ordnung, deren vier reelle Brennpunkte auf einem Kreise enthalten sind.

20. Einem Kegelschnitte des Systems S_1 entspricht in Σ eine Unikursalkurve sechster Ordnung. In dem besonderen Falle, dass der Kegelschnitt ein Kreis a_1 ist, zerfällt die konjugierte Kurve in die beiden Geraden ξ und ξ' und in eine Unikursalkurve vierter Ordnung α, die im allgemeinen durch die imaginären Kreispunkte geht. Denn auf dem Kreise a_1 giebt es, von Z und Z' abgesehen, nur zwei Punkte, denen in Σ unendlich ferne Punkte entsprechen. Da nun die Kurve α vier unendlich ferne Punkte hat, so wird sie ausser jenen zwei Punkten noch die selbstentsprechenden Punkte Z und Z' enthalten.

Die soeben angewendete Schlussweise ist nicht statthaft, wenn der Kreis a_1 die Geraden $\overline{Z\Omega^{\text{I III III}}}$ und $\overline{Z'\Omega^{\text{I III III}}}$ berührt. Dann degeneriert α in einen Kegelschnitt, der nicht durch Z und Z' geht.

Wenn endlich der Kreis a_1 zwei der Punkte $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ enthält, so zerfällt α in einen Kreis und in zwei der Geraden $\pi^{12}\pi^{23}\pi^{31}$. Dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten P^{12} und P^{31} ist also in Σ ein System von Kreisen zugeordnet, welche die Übergangskurve zweimal berühren. (Fig. 9.) Ist m_1^{I} ein Kreis des betrachteten Büschels mit dem Mittelpunkte M_1^{I}, so gehen die in S_2 und S_3 konjugierten Kreise m_2^{I} und m_3^{I} resp. durch $P^{12}P_2^{31}$ und $P_3^{12}P^{31}$.

Bezeichnet man ferner mit Q_I den zweiten Schnittpunkt von m_1^I und m_2^I, mit R_I den zweiten Schnittpunkt von m_3^I und m_1^I und mit $A_1B_1\ldots$, $A_2B_2\ldots$, $A_3B_3\ldots$ entsprechende Punktreihen auf $m_1^I\,m_2^I\,m_3^I$, so gehen $A_1\overline{A_2}$, $\overline{B_1B_2}\ldots$ durch Q_I, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{B_3B_1}\ldots$ durch R_I, und es liegt daher Q_I auf $\overline{P^{31}P_2^{31}}$, R_I auf $\overline{P^{12}P_3^{12}}$. Dann erfüllen die Mittelpunkte $A_{12}B_{12}\ldots$, $A_{31}B_{31}\ldots$ der genannten Strecken zwei Kreise m_{12}^I und m_{31}^I, von denen der erste durch P^{12} und Q_I, der zweite durch P^{31} und R_I geht. Es schneiden sich ferner die Normalhalbierenden $\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12}\ldots$ in einem Punkte von m_{12}^I, nämlich im Gegenpunkte $\mathfrak{Q}_I$ zu Q_I, und da die Gerade π^{31} mit zu den in Rede stehenden Normalhalbierenden gehört, so liegt $\mathfrak{Q}_I$ auf π^{31}. Ebenso gehen $\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{b}_{31}\ldots$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}_I$ von m_{31}^I und π^{12}. Der Kreis μ^I, der dem Kreise m_1^I in Σ entspricht, ist dann das Erzeugnis der Strahlenbüschel $\mathfrak{Q}_I(A_{12}B_{12}\ldots)$ und $\mathfrak{R}_I(A_{31}B_{31}\ldots)$. Dieselben sind kongruent, weil $A_{12}B_{12}\ldots$ und $A_{31}B_{31}\ldots$ ähnliche Punktreihen sind.

Dem Punkte P^{12} entspricht auf μ^I der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}'_I$ von $\overline{\mathfrak{Q}_IP^{12}}$ mit π^{12}, und dem Punkte P^{31} der Schnittpunkt $\mathfrak{R}'_I$ von $\overline{\mathfrak{R}_IP^{31}}$ mit π^{31}. Der Kreis μ^I schneidet daher π^{12} in $\mathfrak{Q}_I$ und $\mathfrak{R}'_I$, π^{31} in $\mathfrak{R}_I$ und $\mathfrak{Q}'_I$.

Es ist ferner $\overline{M_1^IM_{12}^I} = \overline{M_{12}^IM_2^I}$, $\overline{Q_IM_1^I} = \overline{M_{12}^I\mathfrak{Q}_I}$, folglich $\overline{M_1^IQ_I} = \overline{M_2^I\mathfrak{Q}_I}$, d. h. $\overline{M_2^I\mathfrak{Q}_I} = \overline{M_1^IP^{12}}$. Ebenso ist $\overline{M_1^I\mathfrak{Q}_I} = \overline{M_2^IP^{12}}$, $\overline{M_1^I\mathfrak{R}_I} = \overline{M_3^IP^{31}}$, $\overline{M_3^I\mathfrak{R}_I} = \overline{M_1^IP^{12}}$.

Um demnach zu dem gegebenen Kreise m_1^I den in Σ konjugierten Kreis μ^I zu konstruieren, bestimme man zunächst die Punkte M_2^I und M_3^I und hierauf $\mathfrak{Q}_I$ und $\mathfrak{R}_I$ gemäss der Bedingung $\overline{M_2^I\mathfrak{Q}_I} = \overline{M_3^I\mathfrak{R}_I} = \overline{M_1^IP^{12}}$. Zieht man dann $\overline{P^{12}\mathfrak{Q}_I}$ und $\overline{P^{31}\mathfrak{R}_I}$, so ergeben sich $\mathfrak{Q}'_I$ und $\mathfrak{R}'_I$. Durch drei der Punkte $\mathfrak{Q}_I\mathfrak{R}_I\mathfrak{Q}'_I\mathfrak{R}'_I$ ist der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^I$ von μ^I bestimmt.

Bezeichnet man mit $m_1^{II}m_1^{III}\ldots$ andere Kreise des durch P^{12} und P^{31} gelegten Büschels, so sind $M_1^IM_1^{II}\ldots$, $M_2^IM_2^{II}\ldots$, $M_{12}^IM_{12}^{II}\ldots$ ähnliche Punktreihen. Es gehen ferner die Kreise $m_{12}^Im_{12}^{II}\ldots$ durch P^{12} und durch den Mittelpunkt von $\overline{P^{31}P_2^{31}}$, sie erzeugen folglich auf π^{31} eine Punktreihe $\mathfrak{Q}_I\mathfrak{Q}_{II}\ldots$, die

zu $M_{12}^{\mathrm{I}} M_{12}^{\mathrm{II}} \ldots$ und also auch zu $M_1^{\mathrm{I}} M_1^{\mathrm{II}} \ldots$ ähnlich ist. Ebenso ist

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}_{\mathrm{II}} \ldots \sim M_1^{\mathrm{I}} M_1^{\mathrm{II}} \ldots,$$

daher

$$\mathfrak{Q}_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}_{\mathrm{II}} \ldots \sim \mathfrak{R}_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}_{\mathrm{II}} \ldots.$$

Projiziert man $\mathfrak{Q}_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}_{\mathrm{II}} \ldots$ von P^{12} aus auf π^{12}, so erhält man die Punktreihe $\mathfrak{Q}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}'_{\mathrm{II}} \ldots$, und zu $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}_{\mathrm{II}} \ldots$ gehört auf π^{31} eine perspektivische Punktreihe $\mathfrak{R}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}'_{\mathrm{II}} \ldots$. Dabei entspricht dem Kreise k_1 in der Punktreihe $\mathfrak{Q}_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}_{\mathrm{II}} \ldots$ der Punkt Π^3, in $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}_{\mathrm{II}} \ldots$ der Punkt Π^2, in $\mathfrak{Q}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}'_{\mathrm{II}} \ldots$ und $\mathfrak{R}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}'_{\mathrm{II}} \ldots$ je ein unendlich ferner Punkt. Die Punktreihen $\mathfrak{Q}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}'_{\mathrm{II}} \ldots$ und $\mathfrak{R}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}'_{\mathrm{II}} \ldots$ sind demnach einander ähnlich. Die Kreise $\mu^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{II}} \ldots$ schneiden also die Geraden π^{12} und π^{31} in vier Punktreihen, von denen je zwei, die nicht auf demselben Träger liegen, entweder ähnlich oder perspektivisch sind.

Sobald die Punkte $\mathfrak{Q}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ bestimmt sind, können für den Kreis m_1^{II} die entsprechenden Punkte $\mathfrak{Q}_{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ unmittelbar konstruiert werden; dieselben ergeben sich nämlich zufolge der Bedingung

$$\frac{\overline{O_1 M_1^{\mathrm{I}}}}{\overline{O_1 M_1^{\mathrm{II}}}} = \frac{\overline{\Pi^3 \mathfrak{Q}_{\mathrm{I}}}}{\overline{\Pi^3 \mathfrak{Q}_{\mathrm{II}}}} = \frac{\overline{\Pi^2 \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}}}{\overline{\Pi^2 \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}}.$$

Die beiden konjektivischen Punktreihen $\mathfrak{Q}_{\mathrm{I}} \mathfrak{Q}_{\mathrm{II}} \ldots$ und $\mathfrak{R}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}'_{\mathrm{II}} \ldots$ haben zwei Doppelpunkte, die in Fig. 9 reell sind, nämlich die Punkte M und N des Art. 11. Denselben entsprechen zwei Kreise μ^i, welche π^{31} berühren.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{V}_i$ und $\mathfrak{W}_i$ resp. die Mittelpunkte der Strecken $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{R}'_i$ und $\mathfrak{R}_i \mathfrak{Q}'_i$, so gehören zu jedem beliebig gewählten Punkte $\mathfrak{V}_i$ zwei reelle oder imaginäre Strecken $\overline{\mathfrak{Q}_i \mathfrak{R}'_i}$ und $\overline{\mathfrak{Q}_k \mathfrak{R}'_k}$, welche in $\mathfrak{V}_i$ halbiert werden.* Daraus folgt, dass auf jeder der Senkrechten, die in $\mathfrak{V}_{\mathrm{I}} \mathfrak{V}_{\mathrm{II}} \ldots$ zu π^{31} errichtet werden, zwei reelle oder imaginäre Kreismittelpunkte $\mathfrak{M}^i$ liegen, und dasselbe gilt für die Normalen zu π^{12} in $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}} \mathfrak{W}_{\mathrm{II}} \ldots$ Da ferner die Geraden π^{23} und λ^1 dem System der Kreise μ^i angehören,

---

* Denn macht man auf π^{31} $\overline{\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} \mathfrak{V}_i} = \overline{\mathfrak{V}_i \mathfrak{Q}_{\mathrm{I}}}$, $\overline{\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} \mathfrak{V}_i} = \overline{\mathfrak{V}_i \mathfrak{Q}_{\mathrm{II}}}$ u. s. w., so entsteht eine Punktreihe $\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} \ldots$, die zu $\mathfrak{R}'_{\mathrm{I}} \mathfrak{R}'_{\mathrm{II}} \ldots$ konjektivisch ist. Den beiden Doppelpunkten dieser Punktreihen entsprechen zwei Strecken $\overline{\mathfrak{Q}_i \mathfrak{R}'_i}$ und $\overline{\mathfrak{Q}_k \mathfrak{R}'_k}$, die $\mathfrak{V}_i$ zum Mittelpunkt haben.

so sind unter den Mittelpunkten $\mathfrak{M}^i$ zwei unendlich ferne enthalten. Daraus folgt: Die Mittelpunkte der Kreise, die in Σ dem Kreisbüschel $P^{12}P^{31}$ entsprechen, erfüllen eine Hyperbel.

In Fig. 9 ist die Übergangskurve σ als Enveloppe der Kreise $\mu^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}}\ldots$ konstruiert worden. Die Übergangskurve besteht dann aus zwei Ovalen, welche die beiden getrennten Teile des Gebiets Σ'' einschliessen.

Nach einem bekannten Satze* über bicirkulare Kurven vierter Ordnung haben $\mu^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}}\ldots$ einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis, dessen Centrum der Schnittpunkt von π^{23} und λ^1 ist.

Dem Kreise μ^i entspricht in S_1 einerseits der Kreis m_1^i, andrerseits eine Kurve vierter Ordnung $m_1^{i'}$. Dieselbe hat, wie man leicht erkennt, in P^{12} und P^{31} einen einfachen, in $P_1^{23}ZZ'$ einen Doppelpunkt und in Z resp. Z' die Geraden $\overline{Z\,\Omega^{\mathrm{II\,III}}}$ und $\overline{Z'\,\Omega^{\mathrm{II\,III}}}$ einmal zu Tangenten. Es ist also dem Kreise μ^i in S_1 eine uneigentliche Kurve sechster Ordnung konjugiert, welche Z und Z' als dreifache Punkte, $\overline{Z\,\Omega^{\mathrm{II\,III}}}$ und $\overline{Z'\,\Omega^{\mathrm{II\,III}}}$ als einfache Tangenten enthält. (Vergl. Art. 16, pag. 31.)

---

21. Erzeugung der Systeme S_1 und Σ durch zweimalige Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. — Die ein-zweideutige Verwandtschaft der Systeme S_1 und Σ kann als ein spezieller Fall einer allgemeineren Verwandtschaft angesehen werden, die zuerst von Clebsch behandelt worden ist.** Wir werden zunächst diese allgemeinere Verwandtschaft in ihren Grundzügen darlegen und alsdann zeigen, durch welche speziellen Voraussetzungen dieselbe in die vorher betrachtete Verwandtschaft übergeht.

Sei F_3 eine Fläche dritter Ordnung ohne Doppelpunkte und S_1 eine Ebene, auf welche F_3 in bekannter Weise eindeutig abgebildet ist. Dann giebt es in S_1 sechs Fundamentalpunkte $P^{\mathrm{I}}\ldots P^{\mathrm{VI}}$, denen sechs Geraden von F_3 entsprechen.

---

* Vergl. Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie der höheren ebenen Kurven, Art. 274.

** Vergl. Note 2 auf pag. 18.

Den übrigen 21 Geraden von F_3 sind in S_1 die 15 Verbindungslinien der Fundamentalpunkte und die sechs Kegelschnitte durch je fünf Fundamentalpunkte zugeordnet.*

Projiziert man die Fläche F_3 aus einem Flächenpunkte C auf eine zweite Ebene Σ, so werden jedem Punkte von Σ im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Punkte von F_3 zugewiesen. Alle Punkte von Σ, denen zusammenfallende Punkte von F_3 entsprechen, erfüllen eine Übergangskurve von der vierten Ordnung. Dem Punkte C entspricht in Σ eine Gerade γ als Schnitt der Tangentialebene in C mit der Ebene Σ. Den 27 Geraden von F_3 sind in Σ gerade Linien konjugiert, die im Verein mit γ die 28 Doppeltangenten der Übergangskurve bilden.

Durch die doppelte Abbildung der Fläche F_3 ist eine ein-zweideutige Verwandtschaft der Ebenen S_1 und Σ definiert, für welche unter andern die folgenden Beziehungen gelten: Es giebt in S_1 sieben Punkte, denen gerade Linien von Σ entsprechen, nämlich die sechs Fundamentalpunkte $P^{\mathrm{I}} \ldots P^{\mathrm{VI}}$ und das Bild C_1 des Projektionspunktes C. Jeder Geraden von S_1, die nicht durch C_1 oder durch einen Fundamentalpunkt geht, ist auf F_3 eine Raumkurve dritter Ordnung konjugiert, welche den Projektionspunkt nicht enthält, und folglich in Σ eine Unikursalkurve dritter Ordnung, welche die Übergangskurve im allgemeinen sechs mal berührt. Dabei entspricht dem vollständigen Durchschnitt des projizierenden Kegels mit der Fläche F_3 in S_1 eine Kurve neunter Ordnung; dieselbe zerfällt in die gegebene Gerade und eine Kurve achter Ordnung mit dreifachen Punkten in $C_1 P^{\mathrm{I}} \ldots P^{\mathrm{VI}}$. — Einer Geraden von Σ ist auf F_3 eine durch den Projektionspunkt gehende ebene Kurve dritter Ordnung konjugiert, folglich in S_1 eine Kurve dritter Ordnung durch C_1 und jeden der sechs Fundamentalpunkte. Die ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen S_1 und Σ ist also vom dritten Grade.

22. Fortsetzung. — Man gelangt zu einem speziellen Falle der eben behandelten Verwandtschaft durch die Annahme,

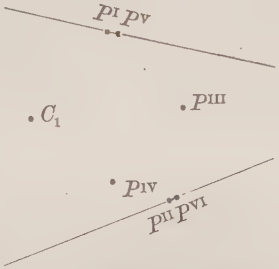
---

* Vergl. Clebsch, Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. Borchardts Journal, Bd. 65.

die Fläche F_3 enthalte zwei konische Knotenpunkte Z und Z'. Dann gehen die 27 Geraden der Fläche bekanntlich über in die quaternäre Gerade $\overline{ZZ'}$, in acht binäre Geraden, von denen sich je vier in einem Knotenpunkte schneiden, und in sieben unäre Geraden, die keinen der Knotenpunkte enthalten. — Die eindeutige Abbildung der Fläche F_3 auf die Ebene S_1 kann in diesem Falle immer so ausgeführt werden, dass von den sechs Fundamentalpunkten zweimal zwei Punkte einander unendlich nahe rücken.* Gesetzt, es wären einerseits P^{I} und P^{V}, andrerseits P^{II} und P^{VI} unendlich benachbart, so bildet sich jeder Knotenpunkt der Fläche ab durch den Ort eines Paares unendlich naher Fundamentalpunkte, z. B. Z durch P^{I}, Z' durch P^{II}. Es entsprechen ferner

der quaternären Geraden die Gerade $\overline{P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{II}}}$,

den vier binären Geraden durch Z der Punkt P^{I}, die Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{III}}}$ und $P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{IV}}$ und der Kegelschnitt durch $P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{III}}P^{\mathrm{IV}}$ mit der Tangente $\overline{P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{VI}}}$,



den vier binären Geraden durch Z' der Punkt P^{II}, die Geraden $\overline{P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{III}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{IV}}}$ und der Kegelschnitt durch $P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{III}}P^{\mathrm{IV}}$ mit der Tangente $P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{V}}$,

den sieben unären Geraden die Punkte P^{III} und P^{IV}, die Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{V}}}$, $\overline{P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{VI}}}$, $\overline{P^{\mathrm{III}}P^{\mathrm{IV}}}$ und die beiden Kegelschnitte durch $P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{III}}$ resp. $P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{IV}}$ mit den Tangenten $\overline{P^{\mathrm{I}}P^{\mathrm{V}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}}P^{\mathrm{VI}}}$.

---

* Vergl. Diekmann, Über die Modifikationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält. Math. Annalen, Bd. IV. — In der angeführten Abhandlung wird für den Fall eines konischen Knotenpunktes gezeigt, dass von der Fläche F_3 immer eine solche Abbildung erhalten werden kann, die durch das Zusammenfallen von zweien der sechs Fundamentalpunkte charakterisiert ist. Ganz dieselbe Betrachtungsweise (Centralprojektion aus dem einen Knotenpunkte und zweimalige Anwendung einer quadratischen Transformation) führt beim Auftreten von zwei konischen Knotenpunkten zu dem oben angegebenen Resultate.

Im vorliegenden Falle erhält die Übergangskurve in der Ebene Σ zwei Doppelpunkte Z und Z', die den Knotenpunkten der Fläche F_3 und folglich den Punkten P^{I} resp. P^{II} von S_1 entsprechen, und sie besitzt nur noch acht eigentliche Doppeltangenten, nämlich die Gerade γ und die Bilder der sieben unären Geraden der Fläche F_3. Dann sind den Punkten $C_1 P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}}$ in Σ drei eigentliche Doppeltangenten der Übergangskurve zugeordnet und den Punkten P^{I} und P^{II} zwei Tangenten, die resp. durch Z und Z' gehen. Der Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}}}$ entspricht in Σ die Gerade $\overline{Z Z'}$ und dieser in S_1 andrerseits ein Kegelschnitt durch $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$. Zu den Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{III}}}$, $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{IV}}}$, $\overline{P^{\mathrm{I}} C_1}$ ergeben sich in Σ drei weitere Tangenten der Übergangskurve aus dem Doppelpunkte Z und zu diesen Tangenten in S_1 andrerseits resp. Kegelschnitte durch $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} P^{\mathrm{IV}} C_1$, $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} P^{\mathrm{III}} C_1$, $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}}$. Analoges gilt für die Geraden $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{III}}}$, $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{IV}}}$, $\overline{P^{\mathrm{II}} C_1}$. Es entsprechen endlich den Geraden $\overline{P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}}}$, $\overline{P^{\mathrm{III}} C_1}$, $\overline{P^{\mathrm{IV}} C_1}$, $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}}}$, $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}}}$ in Σ die fünf übrigen eigentlichen Doppeltangenten der Übergangskurve und diesen in S_1 andrerseits resp. Kegelschnitte durch $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} C_1$, $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} P^{\mathrm{IV}}$, $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} P^{\mathrm{III}}$, $P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$, $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$.

23. Weitere Spezialisierung der Fläche F_3. — Es existieren bekanntlich Flächen dritter Ordnung mit zwei konjugiert imaginären konischen Knotenpunkten Z und Z', mit einer reellen quaternären, acht imaginären binären und sieben unären Geraden, von denen fünf reell und zwei punktiert sind.* Wird eine derartige Fläche F_3 der Abbildung zu Grunde gelegt, so sind die Punkte P^{I} und P^{II} imaginäre Punkte der reellen Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}}}$; die Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}}}$ werden imaginär als Bilder der zwei imaginären unären Geraden; die Punkte P^{III} und P^{IV} bleiben reell, weil sie zwei reellen unären Geraden von F_3 entsprechen. In der Ebene Σ erhält die Übergangskurve zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte und sechs reelle, sowie zwei imaginäre Doppeltangen-

* Vergl. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, pag. 369.

ten, von denen sich die letzten in einem reellen Punkte schneiden.

In diesem Falle kann die zweimalige Abbildung der Fläche F_3 immer so ausgeführt werden, dass einerseits die Doppelfundamentalpunkte P^{I} und P^{II}, andrerseits die Doppelpunkte Z und Z' der Übergangskurve mit den imaginären Kreispunkten der Ebenen S_1 resp. Σ zusammenfallen; denn es bedarf nur einer linearen Transformation, um zwei konjugiert imaginäre Punkte in die imaginären Kreispunkte der betreffenden Ebene überzuführen. Dann bestehen zwischen den Ebenen S_1 und Σ die folgenden Beziehungen:

Die Übergangskurve in Σ ist eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung. Die Ebene S_1 enthält fünf Punkte, denen in Σ gerade Linien entsprechen, nämlich die drei reellen Punkte $P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$ und die imaginären Kreispunkte P^{I} und P^{II}. Den Punkten $P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$ sind drei reelle Doppeltangenten der Übergangskurve zugeordnet, den Punkten P^{I} und P^{II} zwei Tangenten dieser Kurve, welche resp. durch Z und Z' gehen. Den zehn Verbindungslinien von $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$ und den beiden imaginären Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}}}$ entsprechen zwölf Geraden von Σ, nämlich den Geraden $\overline{P^{\mathrm{III}} C_1}$, $\overline{P_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{V}} C_1}$, $\overline{P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}}}$ drei reelle Doppeltangenten der Übergangskurve, den Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}}}$ zwei imaginäre Doppeltangenten, der unendlich fernen Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}}}$ die unendlich ferne Gerade von Σ, den übrigen sechs Geraden sechs imaginäre Tangenten der Übergangskurve, von denen je drei durch einen Kreispunkt gehen. Den zwölf zuletzt genannten Geraden von Σ sind in S_1 andrerseits Kegelschnitte zugeordnet, die, wenn sie reell sind, in Kreise übergehen. Es existieren vier solcher reellen Kreise, nämlich der Kreis durch $P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$ und drei konzentrische Kreise resp. durch P^{III}, P^{IV}, C_1 mit den gemeinschaftlichen Asymptoten $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}}}$. — Jeder Geraden von S_1, die durch keinen der Punkte $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$ geht, entspricht in Σ eine Unikursalkurve dritter Ordnung. Jeder Geraden von Σ ist in S_1 eine Kurve dritter Ordnung konjugiert, welche durch $P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} C_1$ geht und die Geraden $\overline{P^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{V}}}$ und $\overline{P^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{VI}}}$ zu Asymptoten hat.

Man übersieht sofort, dass die zuletzt erhaltene Verwandtschaft zwischen den Ebenen S_1 und Σ indentisch ist mit derjenigen, die in Art. 2 definiert wurde und deren weitere Untersuchung den Gegenstand der vorliegenden Arbeit gebildet hat — nur dass bei den früheren Betrachtungen die Ebenen S_1 und Σ zusammenfielen. Die Punkte $P^{III} P^{IV} C_1$ sind identisch mit den anfänglich eingeführten Punkten $P^{12} P_1^{23} P^{31}$; die Geraden $P^{I} P^{\bar{V}}$ und $P^{II} P^{\bar{V}I}$ wurden vorher mit $\bar{Z}\,\bar{\Omega}^{II\,\bar{III}}$ und $\bar{Z}'\,\bar{\Omega}^{II\,\bar{III}}$ bezeichnet; die Tangenten der Übergangskurve, welche in Σ den imaginären Kreispunkten entsprechen, sind nach der früher gebrauchten Bezeichnung die Geraden ζ und ζ'.

Die ein-zweideutige Verwandtschaft dritten Grades, welche ursprünglich aus der Betrachtung der drei ähnlichen Systeme $S_1 S_2 S_3$ abgeleitet wurde, kann also auch erhalten werden, indem man eine Fläche dritter Ordnung mit zwei konjugiert imaginären konischen Knotenpunkten und von der vorher näher angegebenen Beschaffenheit auf eine Ebene erst eindeutig abbildet und dann durch stereographische Projektion auf dieselbe Ebene überträgt. Dabei ist die eindeutige Abbildung so zu wählen, dass die Doppelfundamentalpunkte mit den imaginären Kreispunkten der Ebene zusammenfallen, und die stereographische Projektion so auszuführen, dass die Knotenpunkte der Fläche sich in den Kreispunkten der Ebene abbilden.

Diese neue Behandlungsweise hat gegenüber der früher angewendeten offenbar den Vorzug, dass sie die allgemeinen Grundbeziehungen unserer Verwandtschaft einfacher abzuleiten gestattet und dass sie manche Resultate, die vorher durch getrennte und wesentlich verschiedene Betrachtungen erhalten wurden, in einen übersichtlichen und naturgemässen Zusammenhang bringt. So ergab sich z. B. in Art. 7 direkt aus der Konstruktion der Punkte, welche gegebenen Punkten von S_1 entsprechen, die Thatsache, dass den drei Punkten $P^{12} P_1^{23} P^{31}$ in Σ gerade Linien konjugiert sind, während für die Punkte Z und Z' der analoge Satz in Art. 5 nur durch eine analytische Untersuchung erhalten werden konnte — dagegen liefert die

zuletzt besprochene Flächenabbildung durch ein einheitliches Verfahren die sämtlichen fünf Punkte, denen in Σ gerade Linien entsprechen. Ebenso findet der Umstand, dass den Geraden von Σ in S_1 Kurven dritter Ordnung mit zwei gemeinsamen Asymptoten konjugiert sind, erst dann seine sachgemässe Erklärung, wenn gezeigt wird, dass in jedem Kreispunkte zwei Fundamentalpunkte der Flächenabbildung zusammenfallen. — Andrerseits wird man von der Erzeugung des Systems Σ durch drei ähnliche Systeme $S_1 S_2 S_3$ immer dann Gebrauch machen, sobald es sich darum handelt, zu einer gegebenen Figur die entsprechende punktweise zu konstruieren. Man wird dieser Betrachtungsweise ferner den Vorzug geben, wenn speziellere Beziehungen bis in ihre Einzelheiten verfolgt werden sollen, so z. B. schon bei den in Art. 15—18 geführten Untersuchungen über konjugierte Kurven der Systeme S_1 und Σ.

---

24. Wir kehren zu der ursprünglichen Betrachtungsweise zurück, nach welcher das System Σ durch die drei ähnlichen Systeme $S_1 S_2 S_3$ definiert wurde, und untersuchen zum Schlusse noch einige spezielle Fälle unserer ein-zweideutigen Verwandtschaft, die sich ergeben, wenn über die Systeme $S_1 S_2 S_3$ besondere Voraussetzungen gemacht werden.

Ist S_1 perspektivisch zu S_2 und zu S_3, so befinden sich auch S_2 und S_3 in perspektivischer Lage. Dann liegen die Punkte $P^{12} P_3^{12} P^{23} P_1^{23} P^{31} P_1^{31} \Omega\Omega^{\text{III}\,\text{III}}$ auf einer Geraden t_1. (Fig. 10.) Allen Punkten $A_1 B_1 \ldots$ von t_1 entspricht in Σ der unendlich ferne Punkt T^∞ einer Normalen zu t_1 und dem unendlich fernen Punkte M_1^∞ einer Geraden m_1 ein Punkt M^∞ in der zu m_1 senkrechten Richtung. Da dem Punkte M^∞ in S_1 nur der Punkt M_1^∞ konjugiert ist, so liegt M^∞ auf der Übergangskurve σ. Die Übergangskurve zerfällt demnach im vorliegenden Falle in die unendlich ferne Gerade und in eine Kurve dritter Ordnung σ'. Die letztere besteht aus einem Oval und einem unendlichen Ast; sie ist symmetrisch in Bezug auf t_1 und geht durch die Schnittpunkte von t_1 mit $\pi^{12}\pi^{23}\pi^{31}$. — Die Kurven $p_1^{12} p_1^{23} p_1^{31}$, welche den Geraden $\pi^{12}\pi^{23}\pi^{31}$ entsprechen, degenerieren in die Gerade t_1 und

in drei Kreise, die Ω^{IIIII} zum Mittelpunkt haben und resp. durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ gehen. Überhaupt entspricht jeder Geraden von Σ, die durch T^∞ geht, die Gerade t_1 und ein reeller oder imaginärer Kreis um Ω^{IIIII}; insbesondere ist der reellen Asymptote ω von σ' der Punktkreis $\Omega^{II\,III}$ zugeordnet.

Einer Geraden g_1 von S_1 entspricht im allgemeinen eine Unikursalkurve dritter Ordnung γ, welche die unendlich ferne Gerade berührt und in T^∞ schneidet. Geht die Gerade g_1 durch P^{12}, so ist ihr ausser der Geraden π^{12} eine Parabel konjugiert, deren Axe zu g_1 normal ist. Die Axen aller Parabeln, die den Geraden durch P^{12} entsprechen, gehen nach Art. 14 durch einen festen Punkt auf t_1. Die zugehörigen Scheiteltangenten umhüllen, wie sich leicht beweisen lässt, eine Parabel, die t_1 zur Axe und π^{12} zur Scheiteltangente hat. — Bezüglich der Geraden von Σ, die nicht durch T^∞ gehen, gilt unverändert der allgemeine Satz aus Art. 9.

25. Setzt man in den Definitionsgleichungen des Art. 4 $\varphi = \psi = 0$, $\mu = \nu$, so sind die drei Systeme $S_1S_2S_3$ perspektivisch und überdies S_2 und S_3 kongruent. Dann genügen die Koordinaten zweier konjugierten Punkte A_1 und A den Gleichungen

$$\begin{cases} 2\mu x - 2\xi + \mu\alpha = 0, \\ (1+\mu)(x^2+y^2) - 2\xi x - 2\eta y = 0, \end{cases}$$

und die betrachtete Verwandtschaft der Systeme S_1 und Σ reduziert sich, wie sofort ersichtlich, auf eine ein-zweideutige Verwandtschaft zweiten Grades.

Im vorliegenden Falle ist $\overline{P^{12}P_3^{12}} = \overline{P_2^{31}P^{31}}$ und für jeden Punkt A_1 von S_1 $\overline{A_2A_3} \# \overline{P^{12}P_3^{12}}$. (Fig. 11.) Die Punkte $P^{23}P_1^{23}\,\Omega\,\Omega^{IIIII}$ fallen mit dem unendlich fernen Punkte der Geraden t_1 zusammen. Konstruiert man zu einem Punkte B von Σ die konjugierten Punkte B_1 und B'_1, so liegen die zugehörigen Kreismittelpunkte B^{II} und B^{III} auf einer Parallelen zu t_1 und folglich ist $\overline{B_1B'_1}$ normal zu t_1.

Den Punkten P^{12} und P^{31} sind in Σ wie vorher die Geraden π^{12} und π^{31} zugeordnet; allen anderen Punkten von t_1 entspricht in Σ der unendlich ferne Punkt T^∞ von π^{12} und π^{31}.

Der Geraden π^{12} ist in S_1 ausser t_1 eine Gerade p_1^{i2} konjugiert, die durch T^∞ und P^{12} geht, so dass jedem Punkte Δ von π^{12} einerseits P^{12}, andrerseits ein Punkt D_1 entspricht, den man erhält, indem man Δ von P^{31} aus auf p_1^{12} projiziert.* Das Analoge gilt für π^{31}.

Jeder Geraden a_1, die durch T^∞ geht, entspricht in Σ eine Gerade α in derselben Richtung, so zwar, dass zu jedem Punkte von α ein reelles, zusammenfallendes oder imaginäres Punktpaar auf a_1 gehört. Der Punkt T^∞ ist daher ein selbstentsprechender Punkt von S_1 und Σ; in S_1 sind ihm überdies alle Punkte von t_1 zugeordnet.

Die Gerade h, welche die Strecke $\overline{P^{12}P^{31}}$ normal halbiert, ist eine selbstentsprechende Gerade von S_1 und Σ, so dass jedem Punkte A auf h ein Punktpaar $A_1A'_1$ derselben Geraden entspricht.

Jeder Geraden g_1^{I}, die durch P^{12} geht, ist in Σ, von π^{12} abgesehen, eine Gerade γ^{I} konjugiert, als Erzeugnis zweier ähnlichen Parallelstrahlenbüschel, die zu g_1^{I} resp. t_1 normal sind. (Fig. 12.) Dabei entspricht dem Schnittpunkte E_1^{I} von p_1^{31} und g_1^{I} der Schnittpunkt E^{I} von g_1^{I} und π^{31} und dem Punkte P^{12} ein Punkt Φ^{I} auf π^{12}, so dass $\overline{P^{12}\Phi^{\mathrm{I}}}$ normal zu g_1^{I} ist. Bestimmt man zu jeder Geraden g_1^i, die durch P^{12} geht, die Punkte E^i und Φ^i und zieht darauf γ^i, so umhüllen $\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}\ldots$ die Übergangskurve σ. Da die Punktreihen $\mathsf{E}^{\mathrm{I}}\mathsf{E}^{\mathrm{II}}\ldots$ und $\Phi^{\mathrm{I}}\Phi^{\mathrm{II}}\ldots$ projektivisch sind, so ist σ ein Kegelschnitt, und da π^{12} und π^{31} mit zu den Tangenten von σ gehören, so kann σ keine Parabel sein.

Den Geraden von S_1, welche durch P^{31} gehen, sind in Σ ebenfalls die Tangenten von σ zugeordnet. Der Geraden γ^{I} entspricht daher in S_1 ausser g_1^{I} noch eine zweite Gerade $g_1^{\mathrm{I}'}$, die man erhält, wenn man Φ^{I} mit P^{31} verbindet.

Da für jede Tangente von σ die Geraden $\overline{\mathsf{E}^iP^{12}}$ und $\overline{\Phi^iP^{12}}$ zu einander normal sind, so ist P^{12} ein Brennpunkt der Übergangskurve. Dasselbe gilt für P^{31}. Die Geraden π^{12} und π^{31} sind Scheiteltangenten von σ. Die Übergangs-

* Für den betrachteten Punkt Δ liegt nämlich der Kreismittelpunkt Δ^{III} auf $\overline{P^{31}\Delta}$ und auf der Normalhalbierenden von $\overline{P^{12}P^{31}}$.

kurve σ ist demnach eine Hyperbel, sobald die Punkte P^{12} und P^{31} ausserhalb des von π^{12} und π^{31} begrenzten Streifens liegen, d. h. sobald $P_3^{12}P^{31} < \overline{P^{12}P^{31}}$ ist. Dieser Bedingung wird übrigens stets genügt, solange in den Definitionsgleichungen $\mu < 1$ ist. Für $\mu > 1$ wird σ eine Ellipse.

Nunmehr ergiebt sich auch die Konstruktion derjenigen Punkte, welche den unendlich fernen des einen Systems entsprechen. Um zu dem Punkte A_1^∞ den konjugierten A^∞ zu ermitteln, ziehe man durch P^{12} eine Gerade g_1 nach A_1^∞ und bestimme zu g_1 in der vorher angegebenen Weise die konjugierte Gerade γ. Dann geht γ durch A^∞. Verbindet man A_1^∞, statt mit P^{12}, mit P^{31} durch eine Gerade l_1, so entspricht derselben in Σ eine Gerade λ, die zu γ parallel ist. — Um ferner zu dem gegebenen Punkte A^∞ die in S_1 konjugierten Punkte zu bestimmen, ziehe man an die Übergangskurve σ eine Tangente γ, die durch A^∞ geht. Schneidet γ die Geraden π^{31} und π^{12} resp. in E und Φ, so geben die Geraden $P^{12}\mathsf{E}$ und $P^{31}\Phi$ die Richtungen nach A_1^∞ und $A'_1{}^\infty$. Fällt bei dieser Konstruktion γ mit einer Asymptote von σ zusammen, so entsprechen dem Punkte A^∞ zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte. Lässt sich ferner in der angegebenen Richtung an σ, falls σ eine Hyperbel ist, keine reelle Tangente legen, so sind dem Punkte A^∞ zwei imaginäre unendlich ferne Punkte zugeordnet.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass sich die Systeme S_1 und Σ in dem gegenwärtig betrachteten speziellen Falle in Bezug auf ihre unendlich fernen Punkte wesentlich anders verhalten, als früher bei der Behandlung des allgemeinen Falles beobachtet wurde. (Art. 6.) War nämlich das System Σ aus drei ähnlichen Systemen $S_1S_2S_3$ hervorgegangen, so entsprach jedem Punkte A^∞ nur ein unendlich ferner Punkt A_1^∞, und zwar in der Weise, dass zwei Strahlen, die nach A^∞ resp. A_1^∞ gingen, einen konstanten Winkel ι bildeten. Es lässt sich auf analytischem Wege leicht verfolgen, weshalb die letzte Beziehung in dem jetzt behandelten speziellen Falle nicht mehr bestehen kann.

Bezeichnet man mit xy die Koordinaten eines Punktes A_1, mit $\xi\eta$ die des konjugierten Punktes A, so ergiebt sich aus den Gleichungen 19) und 20) (Art. 20)

27) $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{[Ux+Vy+(1-\mu^2)va](x^2+y^2)-v^2a[2\cos\psi.x-2\sin\psi.y+a][(1-\mu\cos\varphi)x+\mu\sin\varphi.y]}{(Vx-Uy)(x^2+y^2)-v^2a[2\cos\psi.x-2\sin\psi.y+a][\mu\sin\varphi.x-(1-\mu\cos\varphi)y]}.$$

Lässt man hier x und y in der Weise unendlich gross werden, dass $\frac{y}{x}$ den Wert M erhält, und bezeichnet man den entsprechenden Wert von $\frac{\eta}{\xi}$ mit M, so folgt

$$\mathsf{M} = \frac{U+VM}{V-UM}.$$

Dann ist

$$tan\,\iota = \frac{M-\mathsf{M}}{1+M\mathsf{M}} = \frac{M(V-UM)-(U+VM)}{V-UM+M(U+VM)} = -\frac{U}{V},$$

also ι unabhängig von M.

Für $\varphi = \psi = 0$ wird $V = 0$, also $\iota = \frac{\pi}{2}$, wie in Art. 24 abgeleitet wurde. Setzt man aber überdies noch $\mu = \nu$, so wird auch $U = 0$ und Gleichung 27) geht über in

28) $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{(1-\mu)x^2+(1+\mu)y^2-\mu ax}{\mu y(2x+a)}.$$

Für $x = y = \infty$ und $\frac{y}{x} = M$ ergiebt sich dann

$$\mathsf{M} = \frac{1-\mu+(1+\mu)M^2}{2\mu M}$$

und

$$tan\,\iota = \frac{M-\mathsf{M}}{1+M\mathsf{M}} = -\frac{1-\mu}{M(1+\mu)}.$$

Wenn also $S_1S_2S_3$ perspektivisch und überdies S_2 und S_3 kongruent sind, so ist der Winkel, den die Richtungen nach zwei konjugierten unendlich fernen Punkten bilden, nicht mehr konstant, sondern abhängig von der Lage dieser Punkte.

Wir verzichten darauf, für den zuletzt betrachteten speziellen Fall die Verwandtschaft zwischen den Systemen S_1 und Σ weiter zu verfolgen, und erwähnen als hierher gehörig nur noch die folgenden leicht zu beweisenden Sätze:

1. Jeder Geraden g_1, die zu t_1 parallel ist, entspricht in Σ eine Parabel, welche die Gerade h zur Axe hat.
2. Einer Geraden von S_1, die keine der vorher erwähnten speziellen Lagen hat, entspricht in Σ eine Hyperbel.

3. Den Geraden von Σ sind in S_1 im allgemeinen Kegelschnitte zugeordnet. Ist die Übergangskurve eine Ellipse, so befinden sich unter diesen Kegelschnitten keine Ellipsen und Parabeln.
4. Der Ubergangskurve σ entspricht in S_1 ein Kegelschnitt derselben Art, der P^{12} und P^{31} zu Endpunkten der grossen Axe hat.

26. Wir setzen schliesslich voraus, die Systeme $S_1 S_2 S_3$ seien kongruent, unterwerfen die gegenseitige Lage derselben aber keiner Beschränkung. (Fig. 13.) Dann ist $\triangle P^{12} P_1^{23} P^{31} \simeq \triangle P^{12} P^{23} P_2^{31} \sim \triangle P_3^{12} P^{23} P^{31} \simeq \triangle P^{12} P^{23} P^{31}$ und folglich T^{123} der Schnittpunkt der Höhen in $\triangle P^{12} P^{23} P^{31}$. Den Punkten $P^{12} P_1^{23} P^{31}$ entsprechen Σ resp. die Geraden $\overline{P^{23} P^{31}}$, $\overline{P^{31} P^{12}}$, $\overline{P^{12} P^{23}}$; im übrigen sind den Punkten von $\overline{P_1^{23} P^{31}}$, $\overline{P^{31} P^{12}}$, $\overline{P^{12} P_1^{23}}$ in Σ resp. die Punkte $P^{12} P^{23} P^{31}$ zugeordnet.

Um zu einem beliebigen Punkte A_1 von S_1 den in Σ konjugierten Punkt A zu konstruieren, verfährt man am einfachsten in folgender Weise. Man schlägt von P^{12} und P^{31} Kreisbogen durch A_1 und durch ihren zweiten Schnittpunkt von P^{23} aus (d. h. mit dem Radius $\overline{P_1^{23} A_1}$) einen Kreis, der die vorigen resp. in A_2 und A_3 schneidet. Darauf fällt man von P^{12} und P^{31} auf $\overline{A_1 A_2}$ resp. $\overline{A_3 A_1}$ Normalen, die sich in A treffen.

Ist A gegeben und A_1 gesucht, so bestimmt man zunächst die Punkte A_1^2 und A_1^3, die dem Punkte A in S_1 entsprechen, wenn A dem System S_2 resp. S_3 zugewiesen wird. Man schlägt also durch A von P^{12} und P^{31} Kreisbögen und durch ihren zweiten Schnittpunkt von P_1^{23}, also mit dem Radius $\overline{P^{23} A}$, einen Kreis, der die vorigen resp. in A_1^2 und A_1^3 trifft. Dann ist A_1 der Schnittpunkt der Normalen, die von P^{12} resp. P^{31} auf $\overline{A A_1^2}$ und $\overline{A A_1^3}$ gefällt werden.

Aus dieser Konstruktion folgt, dass jedem Punkte von Σ im allgemeinen nur ein Punkt von S_1 entspricht. Die betrachtete Verwandtschaft ist also, wenn drei kongruente Systeme zu Grunde gelegt werden, eine eindeutige.

Betrachtet man den gegebenen Punkt A als gehörig zu S_1 und konstruiert zu ihm den in Σ konjugierten Punkt, so unterscheidet sich die hierzu nötige Konstruktion von der vorher angegebenen Bestimmung des Punktes A_1 nur insofern, als die Punkte P^{23} und P_1^{23} mit einander zu vertauschen sind. Unter Beachtung dieses Umstandes können die folgenden Sätze einander gegenübergestellt werden:

Jedem unendlich fernen Punkte von S_1 entspricht in Σ ein Punkt des durch $P^{12}P^{23}P^{31}$ gehenden Kreises.

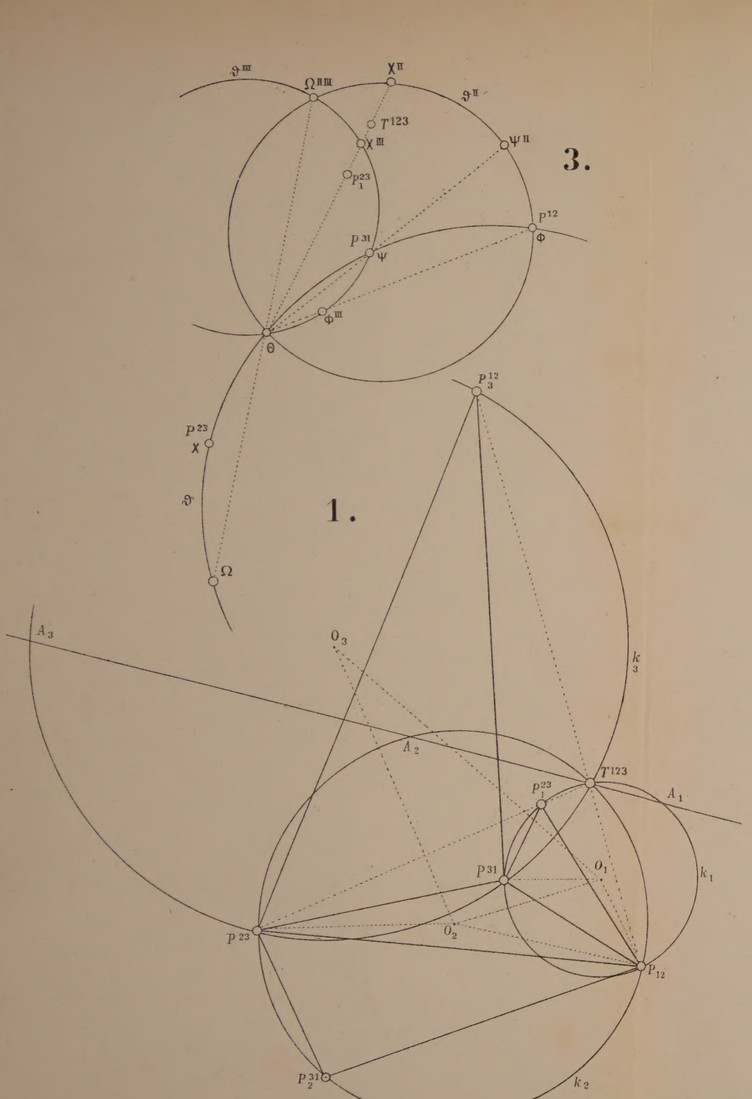
Jedem unendlich fernen Punkte von Σ entspricht in S_1 ein Punkt des durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}$ gehenden Kreises.

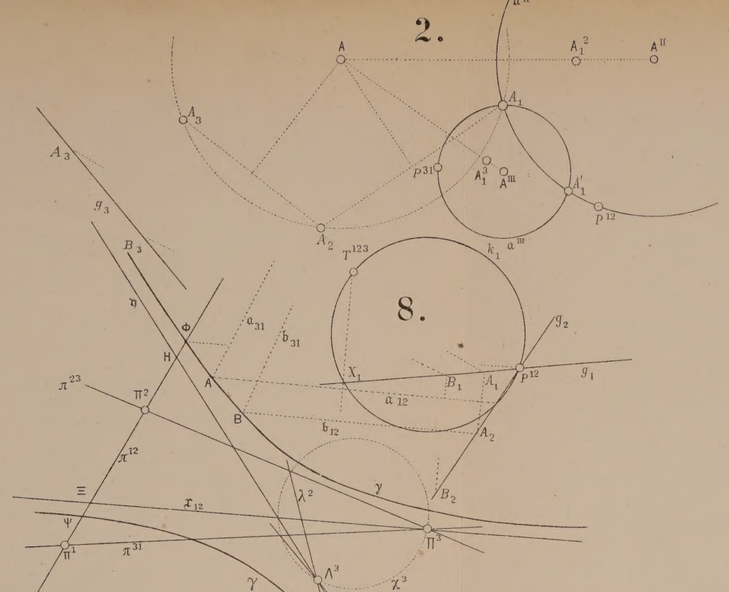
Zu einer Geraden g_1, welche Träger der Punktreihe $A_1B_1\ldots$ ist, ergiebt sich in Σ im allgemeinen ein Kegelschnitt γ als Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel $P^{12}(A_{12}B_{12}\ldots)$ und $P^{31}(A_{31}B_{31}\ldots)$, wobei A_{12} wie früher den Mittelpunkt von $\overline{A_1A_2}$ bezeichnet. Der Kegelschnitt γ geht durch die Punkte $P^{12}P^{23}P^{31}$. Umgekehrt entspricht einer Geraden von Σ in S_1 im allgemeinen ein Kegelschnitt durch $P^{12}P_1^{23}P^{31}$. Die betrachtete Verwandtschaft ist also vom zweiten Grade. Einer Geraden, die den Punkt P^{12} enthält, ist in Σ die Gerade $\overline{P^{23}P^{31}}$ und eine zweite Gerade zugeordnet, die durch P^{12} geht, u. s. f.

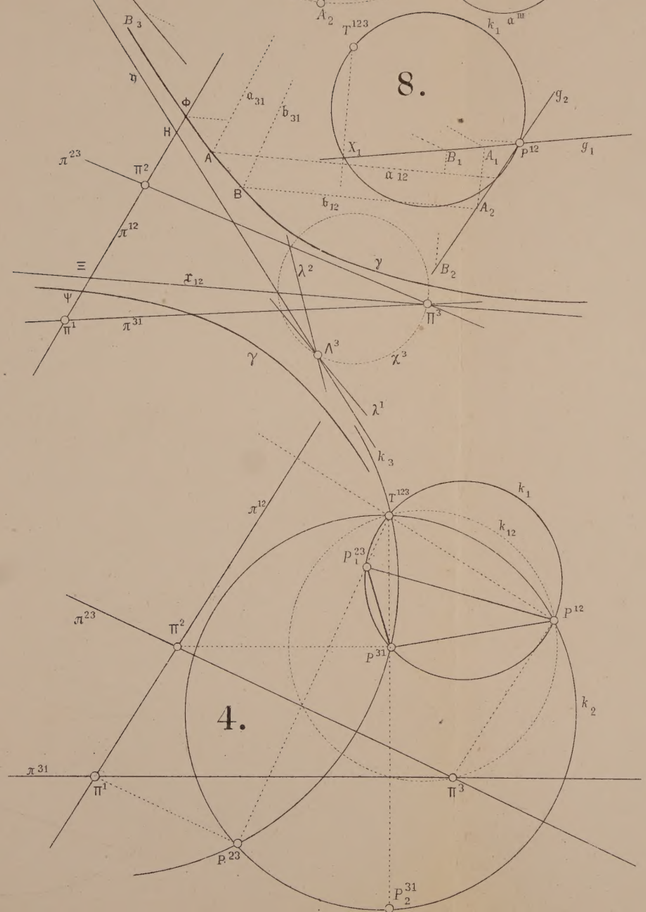
Lebenslauf.

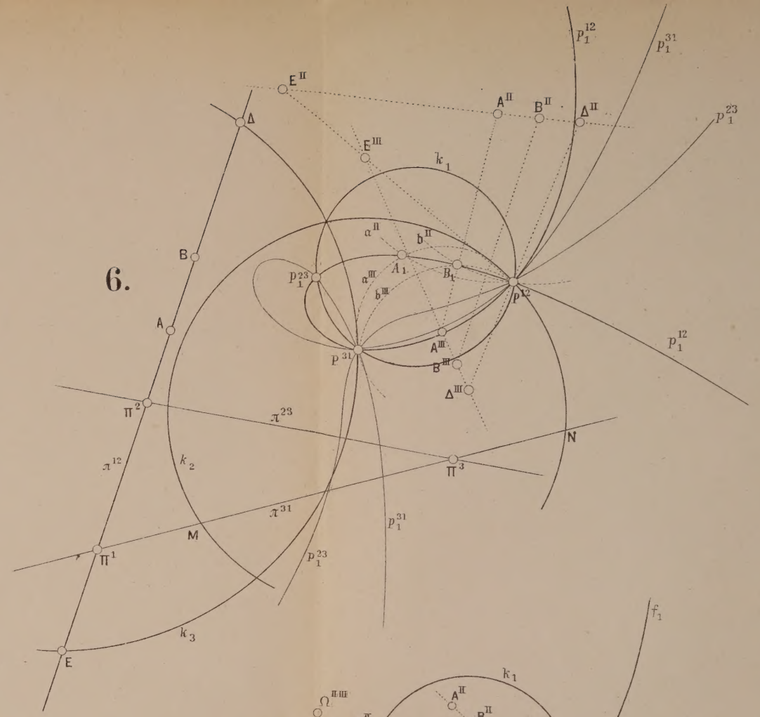
Ich, Heinrich Robert Reinhold Müller, bin geboren zu Dresden am 11. Mai 1857. Von meinem zehnten Jahre an besuchte ich die Annen-Realschule daselbst, die ich Ostern 1874 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Hierauf liess ich mich am Königl. Polytechnikum zu Dresden als Studierender der Ingenieur-Abteilung inscribieren, entschied mich jedoch bereits im ersten Semester für das Studium der Mathematik und zum Übertritte in die Lehrer-Abteilung der genannten Anstalt. Die Herren Professoren Burmester, Königsberger, Töpler, Schultze waren hier meine Lehrer, denen ich mich zu grossem Danke verpflichtet fühle. — Von Ostern 1877 ab setzte ich meine Studien an der Universität Leipzig fort und hörte namentlich Vorlesungen bei den Herren Professoren Hankel, G. Wiedemann, Neumann, Scheibner, Mayer, von der Mühll und Wundt, denen ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank ausspreche.

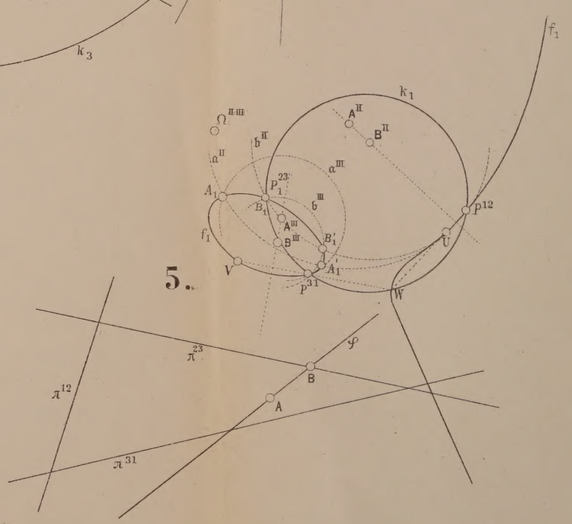
Ostern 1879 absolvierte ich die Staatsprüfung für Kandidaten des höheren Schulamts in der mathematisch-physikalischen Sektion. Nach Erfüllung meiner Militär-Dienstpflicht wurde ich Ostern 1880 durch hohe Verordnung des Königl. Ministeriums des Kultus und öffentlichen Unterrichts als provisorischer Oberlehrer an das Königl. Gymnasium zu Dresden-Neustadt berufen, dem ich noch jetzt als ständiger Oberlehrer angehöre.

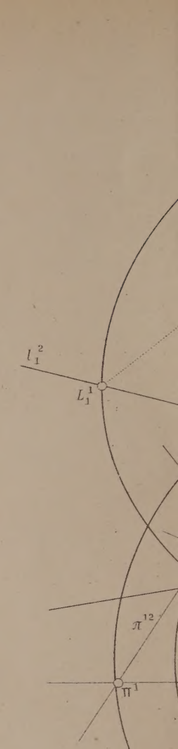




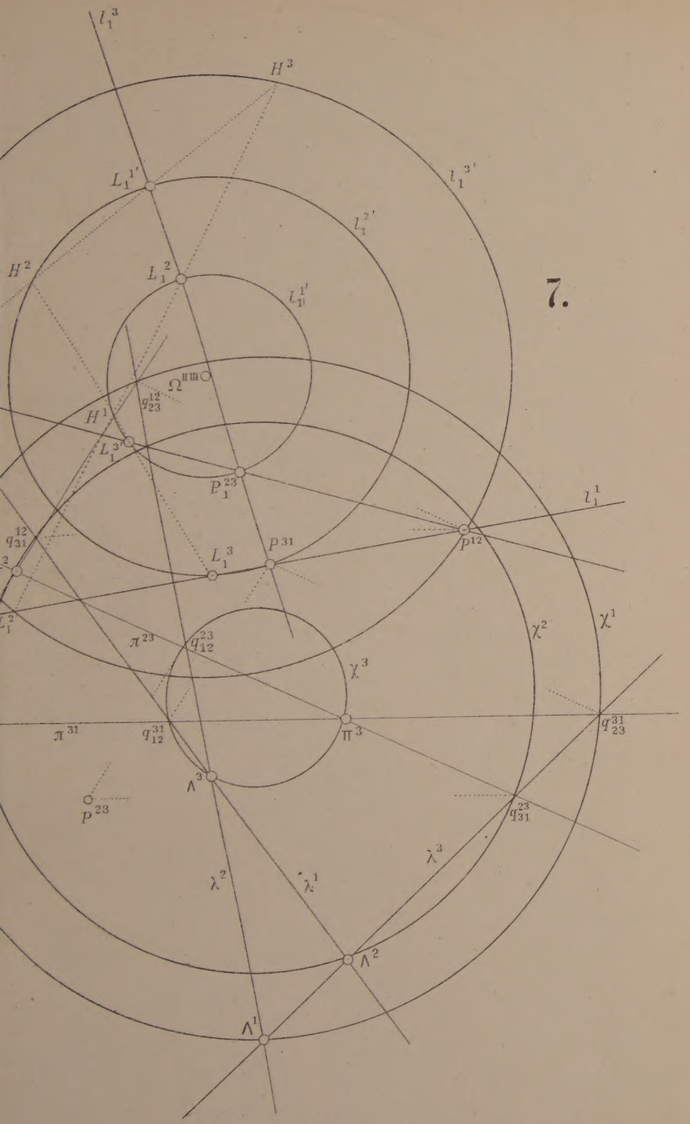


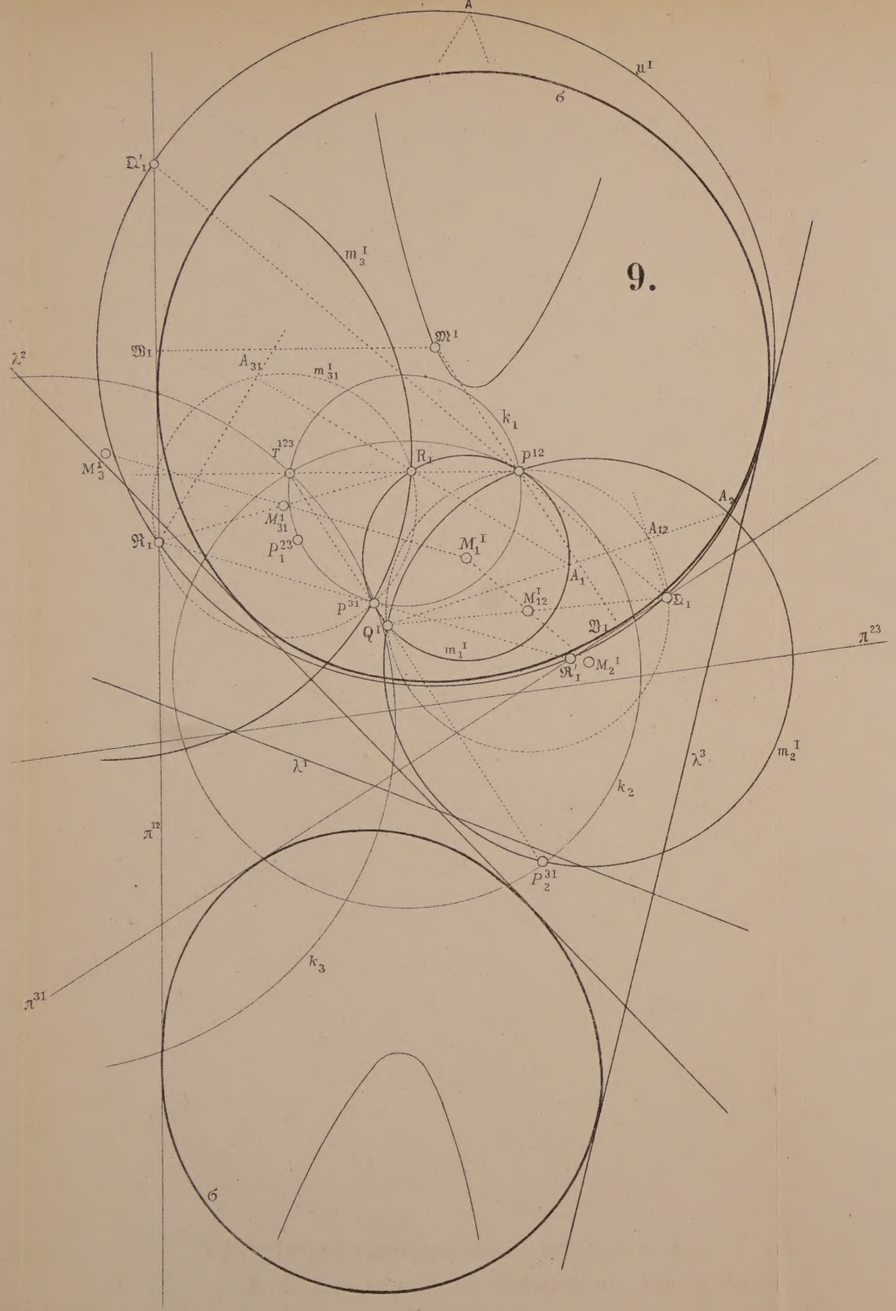


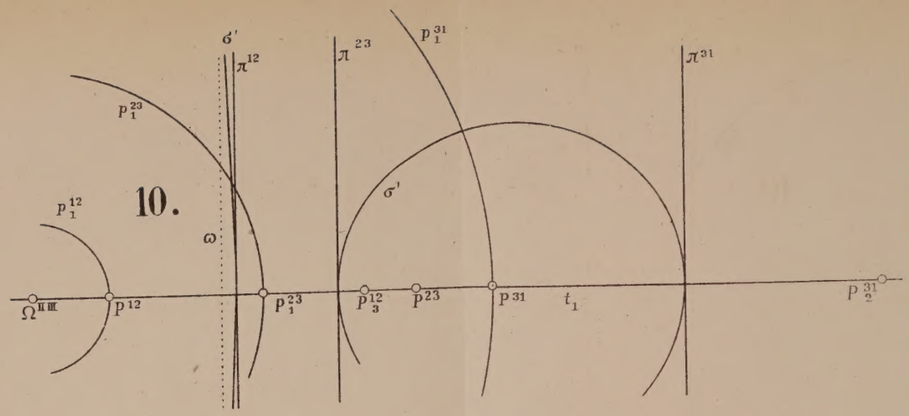


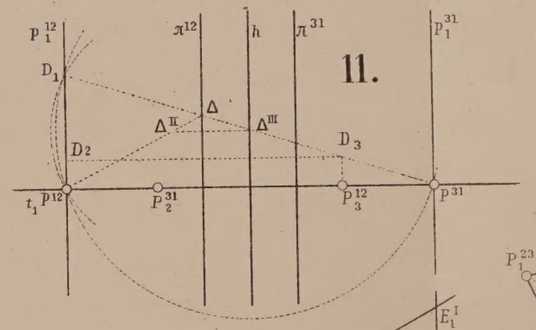


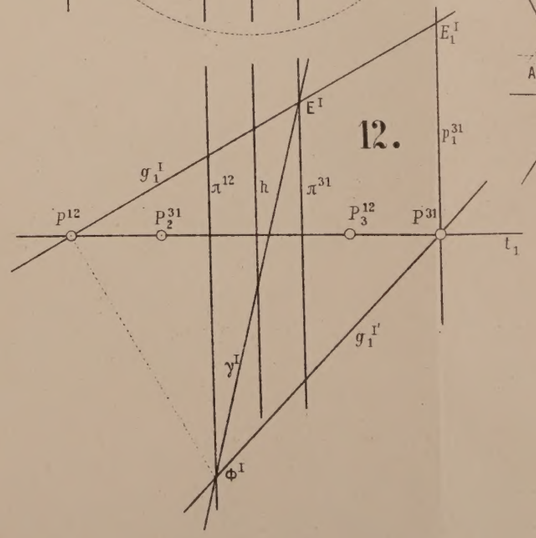
Den Fig
zu

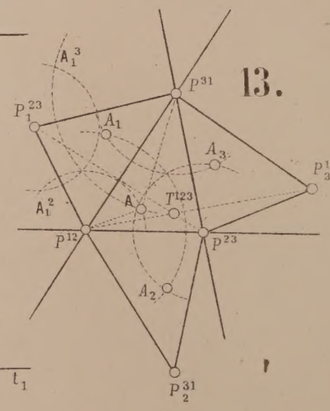












n 1 bis 9 ist dasselbe Fundamentalviereck $P^{12}P_1^{23}P^{31}P^{23}$
runde gelegt. In denselben ist $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = 1 : 2 : 3$.